

Maticová kombinatorika a algebra

Milan Kunz

December 23, 2003

Contents

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Euklidovský, Hilbertův a fázový prostor | 3 |
| 1.1 | Předběžné poznámky | 3 |
| 1.2 | Euklidovský prostor | 6 |
| 1.3 | Jednotkové vektory \mathbf{e}_j | 8 |
| 1.4 | Matice | 9 |
| 1.5 | Skalární součiny a kvadratické formy | 12 |
| 1.6 | Matice v jednotkových rámcích | 14 |
| 2 | Konstrukce vektorového prostoru | 17 |
| 2.1 | Číselné a vektorové stupnice | 17 |
| 2.2 | Formální operace s množinami vektorů | 17 |
| 2.3 | Vlastnosti rovinných simplexů | 21 |
| 2.4 | Konstrukce číselné osy | 24 |
| 2.5 | Komplexní čísla | 25 |
| 2.6 | Vytvořující funkce | 26 |
| 2.7 | Zobecněné jednotkové vektory | 27 |
| 2.8 | Trigonometrické funkce | 27 |
| 2.9 | Přirozená čísla a číslovky | 28 |
| 3 | Lineární operátory | 31 |
| 3.1 | Úvod | 31 |
| 3.2 | Transponování a transverzování | 31 |
| 3.3 | Translace a permutace | 32 |
| 3.4 | Inverzní prvky | 34 |
| 3.5 | Diagonalizace matic | 38 |
| 3.6 | Maticová aritmetika | 39 |
| 3.7 | Normalizace matic | 41 |
| 3.8 | Kořeny matic | 41 |
| 4 | Rozdělení | 43 |
| 4.1 | Předběžné poznámky | 43 |
| 4.2 | Ferrersovy grafy | 44 |
| 4.3 | Maticové rozdělení | 46 |
| 4.4 | Rozdělení se zápornými částmi | 48 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.5 | Rozdělení s vnitřními omezeními | 50 |
| 4.6 | Diference podle jednotkových částí | 52 |
| 4.7 | Eulerova inverze rozdělení | 52 |
| 4.8 | Jiná inverzní funkce rozdělení | 54 |
| 4.9 | Orbity rozdělení v m rozměrných krychlích | 54 |
| 4.10 | Vytvořující funkce rozdělení v krychlích | 56 |
| 5 | Mřížky orbit | 59 |
| 5.1 | Schémata rozdělení | 59 |
| 5.2 | Konstrukce schémat rozdělení | 61 |
| 5.3 | Mřížky orbit | 63 |
| 5.4 | Diagonální diference v mřížkách | 65 |
| 5.5 | Zobecněné mřížky | 67 |
| 6 | Erasthothenesovo síto a jeho Moebiusova inverze | 71 |
| 6.1 | Dělitelé a jejich matice | 71 |
| 6.2 | Moebiusova inverze Erasthothenesova síta | 72 |
| 6.3 | Funkce dělitelů | 73 |
| 6.4 | Vztahy mezi děliteli a rozděleními | 76 |
| 6.5 | Nuly v rozdělení | 78 |
| 7 | Grupy cyklických permutací | 81 |
| 7.1 | Pojem cyklických permutací | 81 |
| 7.2 | Youngovy tabulky | 83 |
| 7.3 | Počet konvolucí | 85 |
| 7.4 | Faktoriály a gamma funkce | 86 |
| 7.5 | Index cyklických permutací | 88 |
| 7.6 | Schémata permutací | 89 |
| 7.7 | Počet přemístění | 90 |
| 7.8 | Eulerova čísla | 92 |
| 7.9 | Mac Mahonova čísla | 93 |
| 7.10 | Spearmanův korelační koeficient | 94 |
| 7.11 | Redukované grupy cyklických permutací | 95 |
| 7.12 | Grupy symetrie | 96 |
| 7.13 | Vierer Gruppe | 97 |
| 8 | Naivní matice v dolní trojúhelníkové formě | 99 |
| 8.1 | Jiná faktoriální funkce | 99 |
| 8.2 | Klasifikace v klesajícím pořádku | 100 |
| 8.3 | Stirlingova čísla prvního druhu | 100 |
| 8.4 | Eulerovy polynomiály | 101 |
| 8.5 | Mac Mahonova čísla | 102 |
| 8.6 | Stirlingova čísla druhého druhu | 103 |
| 8.7 | Substirlingy | 105 |
| 8.8 | Prostor čtyř statistik | 107 |

| | | |
|-----------|---|------------|
| 9 | Kombinatorika přirozených vektorů | 109 |
| 9.1 | Binomiální koeficient | 109 |
| 9.2 | Polynomiální koeficient | 109 |
| 9.3 | Simplexové součty polynomiálních koeficientů | 111 |
| 9.4 | Diference normalizovaných simplexů | 112 |
| 9.5 | Diference podle jednotkových prvků | 113 |
| 9.6 | Diference podle jednoho prvku | 114 |
| 9.7 | Diference $\Delta(n)$ rovinných simplexů | 115 |
| 9.8 | Rozdíl $\Delta(m)$ | 117 |
| 9.9 | Druhá diference– Fibonacciho čísla | 118 |
| 9.10 | Fibonacciho spirály | 119 |
| 10 | Mocninová série | 121 |
| 10.1 | Polynomiální koeficienty pro m permutace | 121 |
| 10.2 | Naivní součiny polynomiálních koeficientů | 122 |
| 10.3 | Diference v mocninové sérii | 122 |
| 10.4 | Operátorová algebra | 125 |
| 10.5 | Diference dx a součty n^m | 126 |
| 10.6 | Některá klasifikační schémata | 127 |
| 10.7 | Klasifikace podle Dvou vektorů | 128 |
| 10.8 | Klesající a stoupající faktoriály | 129 |
| 10.9 | Matice \mathbf{NN}^T | 130 |
| 10.10 | Hlasovací čísla | 132 |
| 10.11 | Diference jiného druhu | 133 |
| 10.12 | Lahova čísla | 134 |
| 11 | Mnohorozměrné krychle | 137 |
| 11.1 | Úvod | 137 |
| 11.2 | Jednotkové krychle | 138 |
| 11.3 | Orbity rozdělení v krychlích | 141 |
| 11.4 | Body v krychlích | 142 |
| 11.5 | Vektorové řady v krychlích | 143 |
| 11.6 | Přirozené krychle - e konstanta | 144 |
| 12 | Matice s celými čísly | 147 |
| 12.1 | Na úvod varování | 147 |
| 12.2 | Matice s jednotkovými symboly | 147 |
| 12.3 | Matice s přirozenými čísly | 149 |
| 12.4 | Interpretace matic s přirozenými čísly | 149 |
| 12.5 | Matice koordinát | 150 |
| 12.6 | Orientované a neorientované grafy jako vektorové řady | 152 |
| 12.7 | Kvadratické formy incidenční matice. | 153 |
| 12.8 | Incidenční matice úplných grafů K_n jako operátory | 154 |
| 12.9 | Bloková schémata | 155 |
| 12.10 | Hadamardovy matice | 156 |

| | |
|--|------------|
| 13 Grafy | 157 |
| 13.1 Historické poznámky | 157 |
| 13.2 Některé základní pojmy teorie grafů | 158 |
| 13.3 Petrieovy matice | 162 |
| 13.4 Matice kódující stromy | 163 |
| 14 Enumerace grafů | 165 |
| 14.1 Úvod | 165 |
| 14.2 Enumerace stromů | 165 |
| 14.3 Grupa symetrie neorientovaných grafů | 167 |
| 14.4 Symetrie neorientovaných grafů | 169 |
| 14.5 Orientované grafy | 171 |
| 14.6 Spojité neorientované grafy | 172 |
| 15 Vlastní hodnoty a vlastní vektory | 173 |
| 15.1 Interpretace vlastních hodnot | 173 |
| 15.2 Vlastní hodnoty a singulární hodnoty | 175 |
| 15.3 Charakteristické polynomiály | 175 |
| 15.4 Permanenty a determinanty | 176 |
| 15.5 Polynomiály grafů | 179 |
| 15.6 Clujsky vážené matice sousedství lineárních řetězců | 182 |
| 15.7 Techniky ořezávání | 185 |
| 15.8 Polynomiály grafů se smyčkami | 186 |
| 15.9 Grafy s vymazanými vrcholy a hranami | 186 |
| 15.10 Seidlovy matice regulárních grafů | 189 |
| 15.11 Spektra neorientovaných podrozdělených grafů | 190 |
| 15.12 Matice sousedství linkových grafů | 191 |
| 15.13 Orientované podrozdělené grafy | 192 |
| 15.14 La Verrier-Frame-Faddějevova technika | 193 |
| 15.15 Kolapsované matice sousedství vysoce regulárních grafů | 194 |
| 15.16 Faktorová analýza | 195 |
| 16 Inversní matice | 199 |
| 16.1 Úvod | 199 |
| 16.2 Invertování matic | 200 |
| 16.3 Matice procházek a cest | 201 |
| 16.4 Inversní matice lichých neorientovaných cyklů | 203 |
| 16.5 Inversní matice neorientovaných cyklických grafů | 204 |
| 16.6 Zobecněné Inverze Laplace-Kirchhoffových matic | 206 |
| 16.7 Technika zakořenění | 207 |
| 16.8 Vztahy Spekter grafů a komplementárních grafů | 209 |
| 16.9 Součiny Laplace-Kirchhoffových matic | 210 |
| 16.10 Systémy lineárních rovnic | 212 |

| | |
|--|------------|
| 17 Matice vzdáleností | 215 |
| 17.1 Úvod | 215 |
| 17.2 Vlastnosti matice vzdáleností | 217 |
| 17.3 Uložení grafů | 218 |
| 17.4 Vlastní hodnoty a vlastní vektory | 222 |
| 17.5 Zobecněné matice vzdáleností | 223 |
| 17.5.1 Zvláštní případy: Lineární řetězce | 223 |
| 17.5.2 Zvláštní případy: Cykl C_4 | 225 |
| 17.5.3 Zvláštní případy: Dva cykly C_4 (krychle) | 227 |
| 17.6 Nelineární a záporné vzdálenosti | 228 |
| 18 Diferenciální rovnice | 229 |
| 18.1 Úvod | 229 |
| 18.2 Analytická geometrie | 229 |
| 18.3 Zenonovy grafy | 231 |
| 18.4 Markovovy matice | 234 |
| 18.5 Mnohorozměrné systémy | 236 |
| 18.6 Matice přechodů | 236 |
| 18.7 Rovnovážné koncentrace | 240 |
| 18.8 Vlastnosti matic součtů (I + M) | 240 |
| 18.9 Klasifikace Markovových matic | 241 |
| 18.10 Jakobiho aproximace | 243 |
| 19 Entropické míry a informace | 245 |
| 19.1 Vzdálenosti a logaritmy | 245 |
| 19.2 Boltzmannova funkce entropie H_n | 247 |
| 19.3 Maximální H_n entropie | 248 |
| 19.4 Shannonova funkce entropie H_m | 250 |
| 19.5 Vzdálenosti a entropie | 251 |
| 19.6 Logické funkce | 252 |
| 20 Literatura | 255 |

List of Figures

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Pythagorova věta. $a^2 + b^2 = c^2$ | 4 |
| 1.2 | Postupné Pythagorovo sčítání. Nové vektory se přičítají jako ortogonální k součtu předchozích | 5 |
| 1.3 | Vektorová akce. Postupné akce A a B a simultánní akce S dvou vektorů a a b vedou k stejné konečné poloze R | 10 |
| 1.4 | Tvář v 8 rozměrném prostoru. Konce jednotlivých vektorů jsou spojené s jejich sousedy přímkami | 12 |
| 1.5 | Skalární součiny. Oba vektory se vzájemně promítají | 12 |
| 1.6 | Maticová vektorová soustava. M – maticový vektor, $\mathbf{J}^T \mathbf{M}$ – pro- jekce maticového vektoru do sloupce, MJ – projekce maticového vektoru do řádky, $Tr(\mathbf{M}^T \mathbf{M})$ – stopa vektoru, $Tr(\mathbf{MJ})$ – stopa vektoru, Λ – vlastní hodnoty vektoru, \mathbf{M}^{-1} – inverzní maticový vektor | 16 |
| 2.1 | Dvourozměrný prostor. Jednotkový vektor I ₂ je ortogonální k rovinným simplexům | 19 |
| 2.2 | První pět 3 rozměrných rovinných simplexů | 20 |
| 2.3 | Tři rozměrný rovinný komplex | 22 |
| 2.4 | První tři 4 rozměrné rovinné simplexu a pátý. | 22 |
| 2.5 | Tři projekce 5 rozměrného rovinného simplexu.. A – bipyramida, B – jedna strana čtyřstěnu je zploštěná, C – celý simplex je zploštěn. | 24 |
| 2.6 | Konstrukce racionálních čísel. Vektor (1, 1) protíná první rovinný simplex v bodě s koordinátou (0.5, 0.5). | 24 |
| 2.7 | Konstrukce iracionálních čísel. Vektor vedoucí k projekci prvních racionálních čísel <i>a</i> do nekonečného rovinného simplexu má jako koordinátu iracionální číslo <i>b</i> | 25 |
| 2.8 | Komplexní čísla. Jsou složena z reálné a imaginární části | 26 |
| 3.1 | Transponování (A) a transverzování (B) matice | 32 |
| 3.2 | Reprezentace orientovaných a neorientovaných hran jako vek- torových součtů nebo rozdílů | 33 |
| 3.3 | Rozdíl dvou vektorových řad A a B tvoří plochu S | 33 |

| | | |
|------|--|-----|
| 3.4 | Grupa symetrie S_3 . A – identita, všechny prvky zůstávají na svých místech; B, C, D – reflexe, dva prvky si zamění svá místa; E, F – otočení, tři prvky vymění si svá místa v cyklech | 35 |
| 3.5 | Aditivní a multiplikativní vyvažování čísel | 35 |
| 3.6 | Uspořádání matic podle svých indexů | 39 |
| 3.7 | Možnosti sčítání a odečítání matic | 40 |
| 4.1 | Konstrukce Ferrersových grafů. Nová políčka se přičítají na volných místech | 44 |
| 4.2 | Krácení rozdělení omezením řádků a sloupců | 45 |
| 4.3 | Omezování orbit rozdělení. Nejnižší dovolená část r přesouvá rovinný simplex | 48 |
| 5.1 | Mřížka orbit rozdělení $(7, 7)$ | 59 |
| 5.2 | Mřížka rozdělení souborů. Soubor se může rozdělit do dvou nových nebo dva soubory se mohou spojit do jednoho | 64 |
| 5.3 | Mřížky sousedství mezi rovinnými simplexxy | 65 |
| 5.4 | Nejbližší sousedé v 00111 mřížce | 67 |
| 5.5 | Petersenův graf. Sousedící vrcholy jsou ve vzdálenosti 4 | 68 |
| 5.6 | Mřížka třírozměrné jednotkové krychle | 68 |
| 5.7 | Projekce čtyř rozměrné krychle. Jedna 3 rozměrná krychle je otočena o 45^0 | 68 |
| 7.1 | Cyklus permutačních matic. Kladné mocniny se mění v záporné | 82 |
| 7.2 | Sekvence Youngových tabulek | 83 |
| 7.3 | Graf funkce $\Gamma(n)$ | 87 |
| 7.4 | Centrální orbita v 3 rozměrné krychli se stranami 0-2. Čáry spojují body se vzdáleností 2 | 90 |
| 7.5 | 24 permutací řady abcd . Jsou rozděleny do čtyř množin začínajícíchmi kapitálkami. Uspořádejte zbývající tři symboly a všechny permutace na kouli | 94 |
| 7.6 | Problém zasedacích pořádků. Dva zasedací pořádky pro čtyři dvojice | 96 |
| 8.1 | Tři statistiky. A je Eulerova, B je Mac Mahonova, C je Stirlingova. Uspořádané řady jsou a, horizontální symbol, vertikální symbol | 107 |
| 9.1 | Diference rovinného simplexu. Je tvořena jedním vrcholem, jednou neúplnou hranou, jednou neúplnou stranou, atd. | 115 |
| 9.2 | Fibonacciho spirála. Čtverce přepon pravoúhlých trojúhelníků s následnými Fibonacciho odvěsnami jsou lichá Fibonacciho čísla | 119 |
| 10.1 | Kónus hlasovacích čísel. Koordináty a jsou vždy větší než koordináty b | 132 |
| 10.2 | Fibonacciho mřížka. Liché vektory a se netvoří. Fibonacciho čísla počítají omezené řady | 133 |

| | | |
|------|--|-----|
| 11.1 | Diference třírozměrné krychle se stranami 0–2. Rozdíl tvoří body dotýkající se povrchu krychle nejbližšího ke středu koordinát. Body difference mají koordináty (permutované): $(0, 0, 0)$; $(0, 0, 1)$; $(0, 1, 1)$; $(0, 1, 2)$ | 138 |
| 11.2 | Tři rozměrná krychle se stranou 0-1 | 139 |
| 11.3 | Vznik třírozměrné krychle se stranou 0-2 ze čtverce se stranou 0-2 (prázdné kroužky). Přidá se jednotková třírozměrná krychle se stranou 0-1 (zaplněné kroužky) a strany se doplní | 141 |
| 12.1 | Dvě diagonální řady v třírozměrné krychli 0-2. Najdi zbývající čtyři | 152 |
| 12.2 | Dekompozice kvadratických forem $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ a $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ na diagonální vektor \mathbf{V} a maticový vektor sousedství \mathbf{A} . $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ a $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ jsou ortogonální | 154 |
| 13.1 | Sedm mostů v Königsbergu a Eulerovo grafové řešení hlavolamu | 157 |
| 13.2 | Příklady neorientovaných grafů. A – strom, B – cyklický graf, C – multigraf | 159 |
| 13.3 | Graf a jeho hranový graf | 160 |
| 13.4 | Restrikce grafu. Vrcholy v kružnici A jsou spojené do jednoho vrcholu a | 160 |
| 13.5 | Rozhodovací strom. Levá větev znamená 1, pravá větev znamená 0. Kořen se bere jako decimální čárka a následná rozhodnutí modelují více hodnotovou logiku | 161 |
| 14.1 | Nejmenší pár grafů na stejné orbitě rozdělení (A a B) a graf s centrální hranou (C) | 166 |
| 14.2 | Grafy se 4 vrcholy a k hranami | 169 |
| 15.1 | Interpretace determinantu | 179 |
| 15.2 | Šest dvojic (A) a jedna trojice (B) řetězce L_6 | 180 |
| 15.3 | Pár nejmenších isospektrálních stromů | 181 |
| 15.4 | Úplný graf K_3 a současně cyklus C_3 | 181 |
| 15.5 | Ořezávání grafů. Grafy 1A a 2A se zvětší přičtením jedné hrany a jednoho vrcholu (1B a 2B). Grafy B se ořezou vynecháním nových hran dohromady se sousedícími vrcholy (prázdné kroužky) a sousedících hran (1C a 2C). | 185 |
| 15.6 | Graf A a jeho vrcholově vymazané subgrafy $A_1 - A_5$ | 187 |
| 15.7 | Strom B a jeho hranově vymazané subgrafy $B_1 - B_5$ | 188 |
| 15.8 | Správné (a) a nesprávné (b) indexování cyklu C_4 | 194 |
| 16.1 | Příklady neorientovaných nesusulárních cyklických grafů | 205 |
| 17.1 | Tři umístění cyklu C_6 | 219 |

| | | |
|------|---|-----|
| 18.1 | Zenonův náčrt aporey Achilla s želvou. Přímký jsou vztahy mezi geometrickými polohami obou soutěžících (svislice) a čas (horizontála) | 230 |
| 18.2 | Exponenciální křivka. Zmenšující se vzdálenostní intervaly z Zenonův náčrt Aporey Achilla s želvou jsou na vertikální ose, horizontální osou je čas | 232 |
| 18.3 | Linearizace exponenciální křivky. Snižující se vzdálenosti mezi body odpovídají konstantním časovým intervalům | 233 |
| 18.4 | Možné přechody dvou písmenné řady. Přímé přechody $cc \leftrightarrow vv$ jsou nemožné | 234 |
| 18.5 | Možné přechody tří písmenné řady | 235 |
| 18.6 | Reakční multigraf | 237 |
| 19.1 | Binární rozhodovací strom je isomorfní s indexováním m objektů binárními číslicemi | 246 |
| 19.2 | Rozhodování ze čtyř možností | 251 |
| 19.3 | Rozhodovací strom. Levá větev znamená 1, pravá větev znamená 0. Kořen se bere jako desetinná čárka | 253 |

List of Tables

| | | |
|------|---|-----|
| 4.1 | Rozdělení do přesně n částí | 47 |
| 4.2 | Rozdělení do nejvýše n částí | 48 |
| 4.3 | Rozdělení jako vektory | 49 |
| 4.4 | Lichá, sudá a smíšená rozdělení | 50 |
| 4.5 | Rozdělení s nerovnými částmi | 51 |
| 4.6 | Rozdělení podle jednotkových částí | 52 |
| 4.7 | Rozdělení a jejich Eulerova inverze | 53 |
| 4.8 | Inverzní matice rozdělení do n částí | 55 |
| 4.9 | Inverzní matice jednotkových rozdílů | 55 |
| 4.10 | Orbity v 3 rozměrných krychlích | 56 |
| 5.1 | Schéma rozdělení (7,7) | 60 |
| 5.2 | Schéma rozdělení $m = 13$ | 61 |
| 5.3 | Schéma rozdělení $m = 14$ | 62 |
| 5.4 | Schéma rozdělení (7,7) a jeho inverze | 62 |
| 5.5 | Pravostranní sousedé o jednu jednotku v orbitách rozdělení . . . | 64 |
| 5.6 | Diagonální rozdíly rozdělení | 66 |
| 6.1 | Erasthotenesovo síto a jeho Moebiusova inverzní funkce | 72 |
| 6.2 | Diagonální hodnoty Erasthotenova síta a jejich Moebiusovy inverze | 74 |
| 6.3 | Počty čísel dělených danými děliteli | 75 |
| 6.4 | Inverzní funkce počtu čísel | 75 |
| 6.5 | Počet částí v rozděleních | 79 |
| 7.1 | Rozdělení konvolucí | 85 |
| 7.2 | Stirlingova čísla prvního druhu | 89 |
| 7.3 | Počty přemístění | 90 |
| 7.4 | Přiřazená Stirlingova čísla prvního druhu | 92 |
| 7.5 | Eulerova čísla | 93 |
| 7.6 | Mac Mahonova čísla | 93 |
| 8.1 | Eulerovy polynomiály $E_n(2)$ | 102 |
| 8.2 | Stirlingova čísla druhého druhu | 103 |

| | | |
|-------|---|-----|
| 8.3 | Diference Stirlingových čísel druhého druhu | 105 |
| 8.4 | Substirlingy | 106 |
| 8.5 | Asociovaná Stirlingova čísla druhého druhu | 107 |
| 8.6 | Schéma čtyř statistik pro \mathbf{N}_4 v dolní trojúhelníkové formě | 108 |
| 9.1 | Van der Mondova identita | 112 |
| 9.2 | Diference podle jednotkových prvků | 113 |
| 9.3 | Matice binomiálních koeficientů \mathbf{B} | 116 |
| 9.4 | Matice $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ binomiálních koeficientů | 116 |
| 9.5 | Kompozice vektorů s m částmi | 117 |
| 9.6 | Fibonacciho čísla | 118 |
| 10.1 | Sekvence mocninové série | 123 |
| 10.2 | Diference $\Delta^n \mathbf{0}^m$ | 123 |
| 10.3 | Diference mocninové série | 125 |
| 10.4 | Rozdíly počtu přemístění | 127 |
| 10.5 | Rozdíly počtu přemístění v mocninové sérii | 128 |
| 10.6 | Diference mocnin podle n_1 | 128 |
| 10.7 | Klesající faktoriál a jeho inverzní matice | 130 |
| 10.8 | Fibonacciho a hlasovací čísla | 132 |
| 10.9 | Diference binomiálních koeficientů | 134 |
| 10.10 | Diference m^2 | 134 |
| 10.11 | Lahova čísla \mathbf{L} | 135 |
| 10.12 | Diference jako součin $\mathbf{S}_2\mathbf{S}_1$ | 135 |
| 11.1 | Řady v jednotkové krychli \mathbf{F} | 139 |
| 11.2 | Orbity rozdělení v krychli 0-2 | 141 |
| 11.3 | Body v krychli s $c=2$ | 142 |
| 11.4 | Vektorové řady v krychli s $c=2$ | 143 |
| 11.5 | Řady v 2 rozměrných krychlích | 144 |
| 12.1 | Rozdělení jednotkových matic $m = n = k = 4$ | 148 |
| 12.2 | Matice s prvky ≥ 1 | 149 |
| 14.1 | Stromy vytvořené polynomiálem $??$ olynomi alu a inverzní matice | 167 |
| 14.2 | Vztahy mezi S_n a G_n grupami | 168 |
| 15.1 | Polynomiální koeficienty lineárních řetězců L_n | 180 |
| 17.1 | Vlastní hodnoty d^* \mathbf{D}^k matic lineárního řetězce L_5 | 224 |
| 17.2 | Vlastní hodnoty d^* cyklu C_4 a \mathbf{D}^k matic | 225 |
| 17.3 | Vlastní hodnoty d^* \mathbf{D}^k matic rombického cyklu C_4 | 226 |
| 17.4 | Vlastní hodnoty dvou jednotkových čtverců ve vzdálenosti d^2 . . | 227 |
| 19.1 | Logické funkce | 253 |

Předmluva

Když studujeme matematiku, zjistíme, že má mnoho odvětví a specializací: algebru, geometrii, topologii, diferenciální a integrální počet, kombinatoriku; různé teorie: teorii čísel, teorii grup, teorii množin, teorii grafů, teorii informace, teorii kódování, speciální teorie rovnic, teorii operátorů, atd.. Zdá se, že neexistuje žádný sjednocující koncept.

Známe však pouze jeden svět, ve kterém žijeme, pouze jednu fyziku, jednu chemii, jednu biologii. Také by měla existovat pouze jedna matematika.

Titul této knihy je "Maticová kombinatorika a algebra".

Kombinatorika je staré odvětví matematiky. Její základy se považují za elementární, poněvadž jsou založeny na dobrých příkladech. Avšak to má své omezení: Existuje příliš mnoho identit ještě jich více zbývá k objevení. Mysl je jimi přeplněna, jak Riordan poukázal [1], protože se ukazuje pouze nepořádek v hojnosti. Klasická kombinatorika zahrnovala mnoho odvětví, která se později rozdělila, avšak která jsou podstatná pro její pochopení. Naleznete zde témata jak z teorie čísel tak z teorie grup.

Algebra je velmi abstraktní věda, vyjma své jedné větve, lineární algebry. Studují se operace s vektory maticemi. A na těchto pojmech je založena podstatata knihy.

Myslím si, že jsem našel cestu do podivuhodného světa kombinatoriky. Začalo k dávno, když jsem náhodně objevil, že dvě proslulé funkce entropie

$$H = - \sum p_j \log p_j,$$

jak ji definoval Boltzmann [2] a Shannon [3], jsou dvě odlišné funkce ze dvou polynomičeských koeficientů, v protikladu k obecně přijatým názorům principu negentropie.

Měl jsem tenkrát pocit jako kadet Biegler [4]. Vzpomeňte na jeho zoufalý výkřik: "Jesusmarja, Herr Major, es stimmt nicht!". Starší důstojníci klidně naslouchali přednášce o kódování, avšak daný příklad nedával smysl, protože měli po ruce jiný svazek, než předpisovaly instrukce. Jméno knihy bylo "Sünde der Väter". Podobně jako ve švejkovi si myslím, že kniha se má číst od svého prvního svazku.

Bylo téměř nemožné publikovat výsledky, protože nesouhlasily s přijatými názory. Můj první pokus byl zamítnut z důvodu, že můj výklad byl nesrozumitelný.

Ve vzteku jsem napsal svůj výklad pro technický časopis pro mládež, kde byl přijat jako vhodné čtení pro jejich naivní čtenáře [5]. Doposud jsem nebyl

schopný publikovat svůj výsledek explicitně. Odborní referenti nepřijali mé argumenty. Z mnoha důvodů. Byl jsem nucen pokračovat ve svém výzkumu, objevit nové vztahy, které dokázaly moji koncepci. Jsou to velmi elementární věci o maticích grafů, které nejsou vysvětleny v učebnicích na jejich vhodném místě, což znamená na počátku. Doufám tedy, že jsem uspěl.

Pokud by tato kniha byla napsána před sto léty, mohla by zachránit jeden lidský život, pokud by byla publikována padesáti roky, mohla by zabránit mylné interpretaci teorie informace.

Matematické rovnice a identity jsou jako kousky skládačky. Jsou uspořádány tradičním způsobem do specializací, které jsou studovány odděleně. Pokud matematikové byli neschopni si uvědomit, že obě funkce entropie vyplývají z identity, známé paradoxně jako Poly-Brillouinova statistika, kterou lze nalézt ve všeobecně používaných učebnicích [6], pak nějaké základní překážky jim zabránily interpretovat jejich abstraktní definice správně.

Když jsem studoval problém entropie, věděl jsem, že to byl kombinatorický problém, poněvadž sám Boltzmann spojil funkci H s kombinatorickou identitou. Mimo to jsem ji koreloval intuitivně maticemi, protože: "Ani jsem nevěděl, co je matice a jak se násobí," jako Heisenberg [7] přede mnou. Obvyklé výklady matic mi nedávaly žádný smysl.

Můj přístup je elementární: řada symbolů (slovo, text)

- "výklady matic mi nedávaly žádný smysl "

je považována za řadu následných vektorů napsaných tučnými písmeny jako vektory

- "výklady matic mi nedávaly žádný smysl"

vektory v řadě jsou napsány s použitím formalismu

- $\mathbf{j} = \mathbf{e}_j = (0, 0, \dots, 1_j, \dots, 0)$

jako vektor sloupec ve formě matice. Nazval jsem matice mající v každé řádce právě jeden jednotkový symbol "naivní". Jiné vhodné názvy, jako primitivní, elementární už byly obsazeny. Matice získané permutacemi nalézající skalární součiny naivní matice s jednotkovými vektory, se sečtou a výsledky se zobrazí v tabulkové formě. Výsledné tabulky kombinatorických funkcí mají formu matice a lze na nich provádět maticové operace, jako je násobení, transpozice a inverze. Aplikace maticové operace byla obvyklá v kombinatorice jako Kroneckerova funkce δ_{ij} , která je implicitní aplikací inverzní matice.

Riordan uvádí mnoho příkladů jejich použití. Avšak maticová technika se nepoužívala systematicky při odvozování kombinatorických identit a nespojovala se základními vlastnostmi vektorových prostorů. Teprve nyní se objevují podobné studie.

Rozdíly součtu dvou naivních matic jsou studovány v druhé části knihy. Jsou známy jako grafy.

Návrhy bloků by mohly tvořit příští krok. Se využívá v pokročilé kombinatorice. Bloky mají maticovou formu a hledají se počty rozlišitelných bloků.

Hall [8] zahájil svou knihu kapitolami rekapitulujícími klasickou kombinatoriku před tím než pojednal návrhy bloků, avšak neučinil žádný pokus použít sjednocenou maticovou techniku k tradiční kombinatorice a vysvětlit kombinatorické problémy jako počítání naivních bloků.

Když jsem spojil kombinatorické problémy s vlastnostmi spočetných vektorových prostorů, objevil jsem jinou cestu do u prostor. Mohu objasnit, ale spoň to věřím, jak tento prostor je vystavěn. Jeho některé základní vlastnostmi nejsou vysvětleny v učebnicích. Buď matematikové je nepovažují důležité, nebo jednoduše je ignorují. Ovšem existuje možnost, že je skrývají jako hermetická tajemství nevysvětlená nezasvěceným. V každém případě Euklidovský prostor má velmi podivuhodné vlastnostmi.

Tato kniha je elementární. Pouze výjimečně jsou uvedeny výsledky vyšší matematik, potom bez důkazů. Nicméně si nemyslím, že je to snadná kniha. Ukazuje, jak složitý svět je, že všechno je spojené s vším. Pokouším se vysvětlit některé části kombinatoriky a maticové algebry nekonvenčním způsobem.

Cílem není matematická přesnost nebo praktické aplikace, avšak dosažení intuitivního porozumění složitosti vektorového prostoru. Dávám přednost úplné indukci před vytvářejícími funkcemi a hlavním cílem knihy je ukázat, že svět nemá pouze tři rozměry, ve kterých se můžeme pohybovat. Musím přiznat, že já sám mám potíže, když se pokouším si představit některé elementární věci. Některá řešení jsem našel pouze po velmi dlouhých obdobích přemýšlení, jakoby správný způsob byl blokován neviditelnými překážkami.

Dříve než začneme, udělejme poznámku o číselných systémech. Každý zná decimální:

$$0 = 10^{-\infty}; 1 = 10^0; 10 = 10^1; 100 = 10^2 .$$

Někdo zná binární:

$$0 = 2^{-\infty}; 1 = 1^1 = 2^0; 10 = 2^1; 11 = 3; 100 = 4 = 2^2 .$$

Avšak nikdo, jak se mi zdá, nestudoval jednotkovou číselnou soustavu:

$$1 = 1^1; 11 = 2 = 1^2; 111 = 3 = 1^3.$$

Rozdíl je, že soustava startuje z první mocniny 1, která je nerozlišitelná od své nulové mocniny

$$1 = 1^{-1} = 1^0 .$$

Logaritmus 1 s base logaritmus 1 je opět 1, logaritmus 111 s basí logaritmu 1 je 3.

Matematické operace v tomto systému jsou jednoduché:
sčítání

$$111 + 11 = 11 \ 111$$

odečítání

$$111 - 11 = 1$$

Násobení a dělení by se měly zapsat jako mocniny, například násobení $(111)^{11}$, avšak lze uspořádat do bloků

$$\begin{aligned} 11 \times 111 &= 111 \\ 111 &= 111 \, 111 \end{aligned}$$

a dělení

$$\begin{array}{r|l} 111 \, 111 \div 11 = 11 \, 11 \, 11 & 1 \\ 11 \, 11 & 1 \\ 11 & 1 = 111 \end{array}$$

Použijeme tento soustavu implicitně bez jeho dalšího zmiňování. Vyskytnou se nějaké problémy s notací. Není dost písmen k použití speciálně pro každou funkci. Proto použijeme některá písmena pro rozdílné funkce bez varování. Obrázky, tabulky a rovnice jsou indexovány odděleně v každé kapitole.

Jednou potíží systematického výkladu je, že nemůžete rozumět všemu najednou. Je nutné zavádět koncepty postupně. Nové znalosti modifikují předchozí definice. Proto některé témata budou pojednány opakovaně, když bude možné využít nově zaváděné techniky. Buďte trpěliví, prosím, když některá věc se zdá být vysvětlována příliš podrobně. Pokud opravdu chcete porozumět, čtěte knihu vícekrát. Je to však dosti mechanický překlad z angličtiny, provedený metodou "nahraď". Nenahrazené zůstaly mimo jiné chyby desetinné tečky používané v americké angličtině.

Zmínil jsem knihy Riordana [9], které byly důležité pro kombinatoriku. Podobně by se měly zmínit knihy Hararyho pro grafy [10,11] kniha Cvetkoviče, Dooba a Sachse [12] pro vlastní hodnoty matice sousedství. Některý části této knihy jsou kompilovány z časopiseckých článků. Chci vyjádřit svůj vděk zejména členům Záhřebské skupiny za mnohé reprinty.

Chapter 1

Euklidovský, Hilbertův a fázový prostor

1.1 Předběžné poznámky

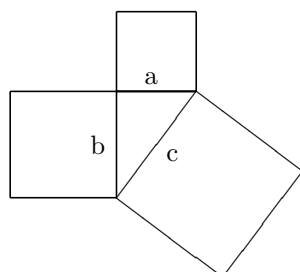
Obecně věříme, že žijeme v třírozměrném prostoru s třemi možnými směry pohybu a jejich protiklady: vpřed a zpět, vlevo a vpravo, nahoru a dolů. Někdy se přidává čas jako čtvrtý rozměr se specifickými vlastnostmi. Čas je nezbytný pro pohyb. Nemůžeme se pohybovat v čase fyzikálně, poněvadž je to proud, který všechno unáší, avšak naše mysl se může pohybovat v čase bez jakýchkoliv potíží.

Náš pojem prostoru je založený na formě našich knih: bod má tři koordináty odpovídající číslu strany, řádky a sloupce ¹. Tři rozměry knihy se tvoří danou konvencí z řady symbolů. Příliš dlouhé řady jsou rozsekány do řádek, příliš dlouhé řady řádek jsou rozsekány do stránek a případně příliš dlouhé sekvence stran jsou rozsekány do svazků tvořících čtvrtý rozměr. Vždy však musíme určit nejprve polohu symbolu v řádku. Existují rozdílné formy knih, jako například svitky. řady symbolů se mohou natáčet na bubny nebo se svinovat do klubek a při tom zůstávají podstatně nezměněné. Podobně body prostoru se mohou indexovat rozdílnými způsoby.

Knihy existují bez jakéhokoliv pohybu, avšak když je čteme, potřebujeme čas pro přenos jejich symbolů do našeho mozku, abychom si zapamatovali podstatná fakta a myšlenky, k přepsání knihy do našeho mozku. Svět je slovo, a to velmi dlouhé slovo, v cizím jazyku. Musíme se učit, jak mu porozumět.

Existuje jeden podstatný rozdíl mezi knihou a naším světem. Svět se pohybuje. Jako kdyby se sama kniha neustále přepisovala. Některé části se nám zdají být stabilní, avšak někde probíhají neustále neviditelné změny. Svět je v okamžiku a kniha A a v příštím okamžiku b kniha B. Všechny možné stavy světa tvoří knihovnu.

¹Také existují polární koordináty udávající polohy jako na kole, avšak ty jsou mimo náš zájem.

Figure 1.1: Pythagorova věta. $a^2 + b^2 = c^2$ 

Avšak budeme analyzovat nejprve jednodušší případ, nehybný text.

Tři rozměry prostoru nejsou ekvivalentní. Pohyb vpřed je snadný, vzad nešikovný, Pohyby vlevo nebo vpravo, jako krabi, nejsou normální, nahoru a dolů se můžeme pohybovat pouze v krátkých skocích (dlouhé pády dolů končí nebezpečně). V knihách oči musí skákat na příští řádky, strany se musí obracet, nové svazky otevírat. Zvyšující se úsilí je potřebné v každém novém kroku.

Matematika abstrahuje tyto rozdíly. Tři rozměry prostoru jsou považované za ekvivalentní a ortogonální.

Náš svět se zdá být omezen těmito třemi rozměry. Nejsme schopni nalézt čtvrtý geometrický rozměr, který by byl ortogonální k prvním třem. To je zdrojem mnoha potíží a nedorozumění. Matematikové se pokusili se jim vyhnout, skrývajíce decentně naši neschopnost jako ostudu.

Od starověku ortogonalita znamená, že mezi dvěma přímkami existuje pravý úhel R . Ve skutečnosti zde musí být 4 R , pokud se kříží dvě přímky

$$\begin{array}{c|c} R & R \\ \hline R & R \end{array}$$

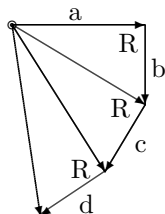
Třetí přímka v rovině musí být buď paralelní k jedné z nich, potom kříží jinou, nebo kříží obě, potom tvoří trojúhelník, vyjma přímky procházející křížením prvních dvou přímek.

Nejdůležitější vlastností pravoúhlých trojúhelníků je, že čtverec nad jejich přeponami jsou stejné součtům čtverců obou ostatních stran jako na obr. 1.1

Nejmenší pravoúhlý trojúhelník, jehož strany jsou celá čísla má strany 3, 4, 5. Jejich čtverce jsou $9 + 16 = 25$. Vztah mezi stranami pravoúhlých trojúhelníků je znám jako *Pythagorova věta*. Znalost pravoúhlých trojúhelníků byla jedním z prvních matematických úspěchů lidstva. Pyramidy mají čtvercové základny. Jejich triangulace byla velmi přesná díky využití této znalosti.

Podobně jako nejsme schopni nalézt čtvrtý rozměr, nejsme ani schopni rozhodnout, zda množina čísel neodpovídá množině ortogonálních přímek, jejichž délky

Figure 1.2: Postupné Pythagorovo sčítání. Nové vektory se přičítají jako ortogonální k součtu předchozích



odpovídají daným číslům. Kresleme postupně pravoúhlé trojúhelníky (ale lépe) jako na obr.1.2

Každá nová přímka je ortogonální k pravoúhelníkovému součtu všech předázejících přímek. Pokuste se vytvořit třírozměrný model tak, že položíme třetí přímku kolmo k rovině, ve které leží první dvě přímky. Potom otočíme tuto přímku do roviny ortogonální k přeponě, skládající ji dolů, až se dotkne roviny. Tím vznikne nad rovinou místo pro čtvrtý vektor, opět ortogonální k přeponě prvních tří vektorů.

Dostaneme obecnou rovnici

$$L^2 = \sum m_j^2 \quad (1.1)$$

kde m_j^2 zastupuje n rozdílných odvěsen a L^2 je čtverec délky všech n odvěsen. Můžeme otočit postupně každý vektor roviny takovým způsobem, že tvoří pravoúhlý trojúhelník se součtem všech ostatních $(n-1)$ vektorů, avšak nesmíme uvažovat současně více přímek neboť zjistíme, že nejsou ortogonální, jak jasně vidíme na obr.1.2, kde byla nakreslena série pravoúhlých trojúhelníků.

Pokud bychom měli k dispozici více rozměrů, mohli bychom rozložit takové součty do n ortogonálních směrů.

Součet n čtverců s hodnotami stran (délkami) m_j^2 se může opět rozložit do Pythagorova trojúhelníku, jehož čtverce stran a , b , c jsou postupně

$$a^2 = n\overline{m} \quad (1.2)$$

$$b^2 = \sum m^2 - n\overline{m} \quad (1.3)$$

$$c^2 = \sum m_j^2, \quad (1.4)$$

\overline{m} v rovnici 1.4 je známý jako *aritmetický průměr*. Ve skutečnosti aritmetický průměr může být identický s jedním z n sčítanců. Aritmetický průměr se počítá obvykle nalezením součtu všech m hodnot a jeho dělením n

$$\overline{m} = \sum m_j / n. \quad (1.5)$$

Přímkovou délkou strany je její odmocnina. Zde se odmocnina n objevuje poněkud překvapivě, avšak je to délka diagonály n rozměrné krychle. Podobně třetí stranu trojúhelníku (1.3) se může normalizovat jejím dělením s n . Potom dostaneme hodnotu σ^2 známou jako *disperze*

$$\sigma^2 = 1/n \sum (m_j^2 - n\overline{m}^2). \quad (1.6)$$

Odmocnina disperze, která je srovnatelná s průměrem, je známá jako *standardní odchylka* σ . Například vezměte hodnoty 1, 2, 3, 4. Jejich průměr je 2.5, součet čtverců $30 = 1 + 4 + 9 + 16$. Disperze je $1/4(30 - 4 \times 6.25) = 1.25$.

Při počítání průměru a standardní odchylky nepotřebujeme znát směry obou odvěsen, protože jsou určeny automaticky svými délkami, jako když se trojúhelník konstruuje ze známých délek svých tří stran. Nakreslíme dvě kružnice s průměry a a b na obou koncích strany c . Kde se kružnice kříží, leží třetí vrchol. Směr všech stran v mnohorozměrném prostoru je pro nás zcela abstraktní.

1.2 Euklidovský prostor

Prostor pravoúhlých trojúhelníků a nikdy se křížících rovnoběžek je známý jako *Euklidovský prostor*. Jeho zobecnění do nekonečně mnoha rozměrů $n \rightarrow \infty$ pro součet 1.4 je známé jako *Hilbertův prostor*. Euklidovský prostor s n rozměry v něm tvoří podprostor.

Euklides založil svoji geometrii n pěti postulátech:

1. Lze vést přímku z jakéhokoliv bodu k jinému.
2. Konečnou přímku lze nepřetržitě prodloužit.
3. Lze opsat kružnici s jakéhokoliv středu s jakýmkoliv poloměrem.
4. Všechny pravé úhly se vzájemně rovnají.
5. Pokud přímka protínající dvě přímky tvoří vnitřní úhly na stejné straně menší, než dva pravé úhly, pokud se prodlouží do nekonečna, sbíhají se na straně, kde jsou úhly menší než dva pravé úhly.

Pátý postulát je nadbytečný. Z toho plyne přímo z aplikace prvních čtyř postulátů v následující konstrukci.

Vezmeme čtverec ABCD. Všechny jeho pravé úhly jsou podle 4. postulátu pravé, všechny jeho strany jsou přímky. Přidáme k tomuto čtverci ABCD nový čtverec CDEF a vyrovnáme strany AE a BF podle 2. postulátu. Ke získanému obdélníku ABEF přidáme nový čtverec EFGH, opět vyrovnáme strany AG a BH podle 2. postulátu. Takovým způsobem budeme pokračovat s přidáváním čtverců do nekonečna, případně na jiné kratší straně obdélníka.

Takovým způsobem vytvoříme paralelní přímky spojené hranami.

Existují dvě možnosti, že dlouhé strany nekonečného obdélníku se setkají nebo rozejdou. Buď těmito dlouhými stranami nejsou přímky odpovídající požadavkům 2. postulátu, nebo pravé úhly následných čtverců nesplnily požadavky 4. postulátu.

Pátý postulát je důsledek aplikace předešlých postulátů pro nekonečné konstrukce.

Problém ortogonalit ztrácí svou důležitost v Hilbertově prostoru. Pokud máte zásobárnu nekonečně mnoha vektorů, můžete vybrat jakéhokoliv dva jako první, které budou vzájemně kolmé. Můžete být jisti, že naleznete třetí, který bude ortogonální k prvním dvěma. Tak můžete pokračovat. Budete vyčerpáni před tím, než budete schopni vyčerpat nekonečnou zásobárnu. Nebo můžete být líní a použít alternativně vektory s úhly většími a menšími než ortogonální. Chyby se budou určitě postupně kompenzovat.

Euklides zavedl axiomy do matematiky. Prostor a jeho prvky jsou definovány množinou proposic. Nevýhodou tohoto přístupu je, že nevíme a priori, jejíž prvky tvoří prostor. Použijeme jiný přístup a budeme generovat prvky postupně.

Setkáme se s prostory s mnoha rozměry, poznávající, že nejsme sami v prostoru. V tomto zvláštním prostoru žijí jiní lidé a existuje v něm mnoho věcí. Každá jednotlivost má svou vlastní polohu v prostoru. Pro výčet těchto poloh potřebujeme pro každý objekt jeho specifické řádky s vlastními koordinátami. V každé řádce musí být tolik koordinát, kolik má prostor, v němž jednotlivosti existují, rozměrů. Pokud by bylo m jednotlivostí v n rozměrném prostoru, bylo by nutné znát mn koordinát, v 3 rozměrném prostoru potřebujeme pro m jednotlivostí $3m$ koordinát a v 1 rozměrném prostoru stále ještě m koordinát k určení poloh všech objektů.

Prostory s m objekty jsou známy ve fyzice jako fázové prostory². Fázové prostory mají podivnou vlastnost, že některé z nich můžeme vnímat přímo. Všeobecně známým příkladem je teplota a rychlost větru v soustavě molekul vzduchu. Tyto pojmy, které všichni známe z vlastní zkušenosti, odpovídají matematickým pojmům. Každá molekula má při teplotě okolí průměrnou rychlost několika set metrů za sekundu. Nárazy nepatrných molekul na stěny nádoby vyvolávají tlak. Chaotické kolize molekul pohybujících se v rozdílných směrech vedou k stálému rozdělení rychlostí částic. Tyto rychlosti se rozloží do dvou složek. Jedna složka je tvořena částí pohybu, kterou mají společnou všechny částice v daném objemu. Tuto složku, matematicky aritmetický průměr, obvykle velkou pouze několik metrů za sekundu, ve srovnání se shora zmíněnými sty metry za sekundu u jednotlivých molekul, cítíme, když jsme uvnitř soustavy jako její součást, jako vítr, což je fyzikální vlastnost systému molekul. Jinou složkou je disperze z průměrné vektorové rychlosti. Je známá jako tepelný pohyb molekul, teplota.

Ukážeme, že všechny fázové prostory jsou *isomorfní*. Některé jejich vlastnosti nezávisí na rozměrnosti n prostoru, ve kterém je uložen soustavou m entit, avšak jsou uvedené pouze počtem entit.

Fázový prostor je tedy realitou a není matematickou konstrukcí. Na neštěstí naše zkušenost je omezena vlastnostech jeskyně v níž žijeme, jak Plato napsal. Je extrémně nesnadné překonat tento handicap a vidět ideální prostory za stíny, které vyvolávají. Stíny vnějšího světa, které naše oči promítají na stěnu jeskyně,

²Počet objektů je zde daný jako n . Aby se zamezilo záměně s n rozměry, použijeme symbol m .

ve které žijeme (mozkovnu) jsou dvou rozměrné³. Třetí rozměr rozlišujeme úsilím svalů očí zaostřujících na retinu. To se děje automaticky. Vyšší rozměry rozlišujeme úsilím našich mozků nebo jejich rozšíření, počítačů. Bude dlouho trvat, než se přizpůsobíme pojmu vyšších rozměrů stejným způsobem jako se náš zrak přizpůsobil třem rozměrům. Naše vizuální orgány se vyvíjely po sta miliony roků. Pojem možnosti neviditelných prostorů se zrodil před 2500 roky, studie jejich vlastností započaly před 250 roky a počítače, které usnadnily jejich porozumění se objevily před 50 roky. Chce to čas.

1.3 Jednotkové vektory \mathbf{e}_j

Nyní je čas zavést pojem lineární translace. Pokud se mikročástice pohybuje ve Wilsonově komoře (nebo letadlo v stratosféře), zanechává za sebou stopu ionizovaných částic, na kterých se kondenzují molekuly. Představte si, že také abstraktní bod, když se pohybuje, zanechává takovou stopu. Nazýváme ji *vektor* a kreslíme ji jako přímku se šipkou ve směru pohybu \longrightarrow . K posunutí bodu musíme použít tuto stopu spojující obě polohy bodu, počáteční a konečnou. Diskutovali jsme ortogonalitu a je zřejmé, že vektory mohou být ortogonální. Avšak definovali jsme ortogonalitu pouze mezi přímkami a proto předpokládáme, že vektory jsou přímkové. Ovšem pohyb v prostoru nemusí být omezen pouze na pohyb podél přímky, avšak pokoušíme se udržívat náš prostor tak jednoduchý, jak je to možné. Můžeme předpokládat, že prostory s křivkovými vektory jsou isomorfní prostorům s přímkovými vektory.

Nyní zavedeme speciální místo v n rozměrném prostoru, od kterého budeme měřit všechny translace. Tento bod budeme nazývat *střed soustavy koordinát*. Potom definujeme n bodů na kouli (kruhu) se středem ve středu soustavy koordinát. Přijmeme rádius koule jako jednotkovou délku. Můžeme si představit, že body na kouli jsou přenesené středy soustavy koordinát a budeme nazývat každý vektor spojující střed soustavy koordinát s definovanými n body na kouli *jednotkový vektor* \mathbf{e}_j . Notací jednotkového vektoru \mathbf{e}_j je řádka v kulatých závorkách s n prvky. Ve fyzice symboly se šipkami se používají jako \vec{j} . $(n-1)$ prvků vektoru \mathbf{e}_j jsou nuly a je pouze jeden jednotkový prvek na j -tém místě

$$\mathbf{e}_j = (0_1, 0_2, \dots, 1_j, \dots, 0_n). \quad (1.7)$$

Stejně délky všech jednotkových vektorů \mathbf{e}_j v (1.3) nejsou podstatnou podmínkou existence vektorového prostoru. Mohli bychom definovat jednotkové vektory \mathbf{e}_j v (1.3) jako mající rozdílné délky, provést všechny operace jako s vektory majícími stejné délky a teprve potom modifikovat výsledky podle definovaných délek. Krychle, jejíž strany nejsou rovné, je pravoúhlý rovnoběžník. Její objem se například může vypočítat jako

- strana = 4.4 cm

³Angličtina mi dovolila slovní hříčku, pojem pro mozkovnu je scull cave.

- strana $b = 3.9$ cm
- strana $c = 0.4$ cm
 - objem $= 4.4 \times 3.9 \times 0.4 = 6.864$.

Jinou možností je

- strana $= 2.2 \times$ vektor $\mathbf{a} = 2$ cm
- strana $b = 1.3 \times$ vektor $\mathbf{b} = 3$ cm
- strana $c = 0.4 \times$ vektor $\mathbf{c} = 1$ cm
 - objem $= 2.2 \times 1.3 \times 0.4 = 1.144$
 - objem rovnoběžníka $= 2 \times 3 \times 1 = 6$
 - celkový objem $1.144 \times 6 = 6.864$.

Vektory, které začínají v jiných bodech prostoru jsou srovnávány s těmito vzorky vektorů \mathbf{e}_j začínajícími ve středu. Jsou považované za *identické* s jednotkovými vektory \mathbf{e}_j , pokud jsou *kolineární*. Ovšem tyto vektory mohou být kratší nebo delší, mohou mít opačné směry, avšak takové rozdíly budou napraveny algebraickými prostředky později.

Někdy vektory nesouhlasí s jednotkovými vektory, avšak s jejich lineárními kombinacemi. Předpokládáme, že jednotkové vektory \mathbf{e}_j jsou ortogonální podle definice.

Podrobíme tyto jednotkové vektory rozdílným matematickým operacím. Na jejich součty, rozdíly a součiny, budeme se dokonce pokoušet je dělit. Tyto operace budou provádět v algebraické formě. Než budeme pokračovat, musíme prozkoumat výsledky vektorové translace na nějakých příkladech, abychom interpretovali algebraické výsledky správně.

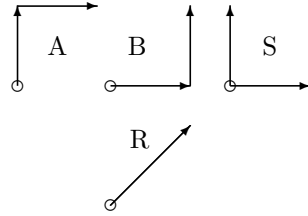
Jak se mohou dva vektory sečítat? Předpokládejme, že střed $\mathbf{0}$ byl nejprve přenesen do bodu a vektorem \mathbf{e}_a potom do bodu s koordinátami ab translací \mathbf{e}_b .

Existují jiné možnosti jak dosáhnout stejný bod. Můžeme nejprve provést translaci \mathbf{e}_b potom translaci \mathbf{e}_a . V učebnicích algebry můžete nalézt, že sumace je *komutativní* operace. Toto slovo znamená, že výsledek operace není závislý na pořadí členů v operaci. Je pravda, že konečná poloha v prostoru neobsahuje informaci o způsobu, jak tato poloha byla dosažena. Avšak zde existuje ještě jiná možnost, jak se vektory mohou sečítat: Oba vektory a současně bod se posunuje přímo ve směru mezi oběma, jako při tažení auta dvěma lany jako na obr.1.3

1.4 Matice

Potřebujeme tedy tři možnosti, jak psát součet dvou vektorů. Musíme mít možnost psát je jako postupně působící vektory nebo jako současně působící vektory. Současně působící jednotkové vektory se mohou snadno zapsat jako

Figure 1.3: Vektorová akce. Postupné akce A a B a simultánní akce S dvou vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b} vedou k stejné konečné poloze R



součet dvou jednotkových vektorů v jedné řádce. Pravidlo je jednoduché, prvky se přičítají na svých místech:

$$(1, 0, 0) + (0, 1, 0) = (1, 1, 0).$$

V této notaci máme celkem n současně působících vektorů v řádce. Tedy musíme psát následné vektory v takovém součtu jak sloupec řádkových vektorů. Dostaneme dva rozdílné sloupce pro naše příklady

$$\begin{pmatrix} (1, 0, 0) \\ (0, 1, 0) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} (0, 1, 0) \\ (1, 0, 0) \end{pmatrix}.$$

Takové sloupce m vektor-řádků mající v každé řádce n prvků jsou známe jako *matice*. řádkové závorky a čárky jsou z matice vymazány. Všimněte si, že v matici jsou prvky uspořádány do sloupců podobně jak do řádků. Je tedy možné použít konvenci, že matice je tvořena n následnými m rozměrnými vektor-sloupci. Poněvadž máme zavedený pro jednotlivé sloupce dolní index j jdoucí od 1 k n , můžeme použít pro řádky matice index i jdoucí od 1 k m . Vzpomeňte se, že index i je přítomný v textech implicitně, jako přirozený pořádek následných symbolů. To nemusí být vyjádřené explicitně.

Někdy je výhodné nechat oba indexy vycházet od nuly. Potom jdou až $(m-1)$ nebo až $(n-1)$. Lze nalézt jeden maticový index napsaný jako dolní a druhý jako horní. Avšak je lepší rezervovat horní index pro mocniny. Když po sobě následují dva stejné symboly, například \mathbf{aa} , píšou se krátce jako \mathbf{a}^2 . Když to děláme, zpracováváme následné vektory jakoby se násobily. Násobení je *nekomutativní* operace. Výsledek závisí na pořadí členů v operaci. Nebudeme používat jakýkoliv symbol pro násobení vektorů nebo matic.

Máme v našich příkladech malé kulaté závorky ve všech řádcích matice uvnitř větších závorek používaných pro matice. Matice se také ohraničují dvojími svislicemi nebo jsou napsány do rámečku. Budeme je psát někdy bez jakýchkoliv ohraničení, avšak když se dotýkají, oddělíme je jednoduchou čarou.

Je ještě nutné uvažovat rozdílné matice s jednotkovými vektory:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice s prázdnými řádky jsou možná nadbytečné, poněvadž žádná akce neodpovídá dané řádce, avšak všimněte si, že třetí matice může být získána z druhé otočením prvků okolo hlavní diagonály, nebo záměnou řádkových i a sloupcových j indexů. Matice \mathbf{M} jsou transponované matice \mathbf{M}^T . Matice s dvěma identickými jednotkovými vektory v následných řádcích se mohou interpretovat jako dvě následné translace jdoucí stejným směrem. Výsledná poloha v prostoru může být zřejmě popsána vektorem $(2, 0)$. Avšak pokud se pokoušíme interpretovat tento vektor s jinými čísly než 0 a 1, máje na vědomí naši konvenci, že vektory v řádce jsou simultánní, máme potíže s interpretací těchto prvků. Můžeme si představit, že translace vyžaduje větší sílu, aby se provedla, a že má dvojitou intenzitu jak v hudbě forte. Abychom byli konsistentní, nemůžeme interpretovat jiné prvky matice, než 0 a 1 jednoduše jako délky vektorů, pokud nezavedeme takové vektory nějakými algebraickými operacemi, které učiní takové multivektory dovošenými prvky v našem prostoru.

V kvantové mechanice existuje princip exkluze formulovaný Paulim. Konstatuje, že v systému nemohou být dvě identické částice. Z naší zkušenosti víme, že v jednom místě nemohou být dvě věci současně. Budeme aplikovat takový princip pro vektory. Omezme se nejprve na matice mající právě jeden jednotkový vektor \mathbf{e}_j nejen v každé poloze, ale také v každé řádce. Použijeme symbol \mathbf{e}_j nejen pro geometrické translace v prostoru, ale také pro rozdílné objekty, e.g. pro písmeny této knihy. (Píši písmena do řádků, tedy text je řádka sloupců a každé písmeno j musí být nahrazeno odpovídajícím jednotkovým vektor-sloupcem \mathbf{e}_j^T). Matice mající jeden jednotkový prvek v každé řádce se zdají příliš "naivní", aby byly studovány, avšak uvidíme, že mají zcela zajímavé vlastnosti.

Jednou užitečnou vlastností naivních matic \mathbf{N} je, že se mohou interpretovat buď jak řady m jednotkových vektorů \mathbf{e}_j jdoucí od středu soustavy koordinát k nějakému bodu v n rozměrném prostoru nebo jako poloha vektoru v m rozměrném prostoru. Abychom udrželi naši konvenci o následnosti a simultánnosti translace vektorů, transponujeme naivní matice \mathbf{N} do \mathbf{N}^T . Píšeme ji jako řádku jednotkových vektorů-sloupců \mathbf{e}_j . Jednotkové symboly se budou objevovat v j -té řádce n rozměrného sloupce místo v j -tém sloupci n rozměrné řádky. Soustava indexů jednotkového prvku je výhodnou značkou délky vektoru \mathbf{e}_i , který vychází ze středu koordinát v m rozměrném prostoru. Neexistuje žádný prvek, který by mohl kolidovat s touto interpretací. Avšak vzdálenosti od středu mohou být nuly. Tedy řádkové indexy se musí počítat od nuly, odečítaje jednotku od každého původního indexu i . V takové interpretaci matice \mathbf{N}^T odpovídá *tvářím* (obr. 1.4).

Když nakreslíme m vektorů na papír, a indexujeme je postupně, označující délkou každého vektoru, a spojíme značky přímkami, dostaneme obrázek připomínající tvář. Každá tvář představuje bod m rozměrného prostoru a existuje tolik tváří jako existuje bodů v tomto prostoru. Znáte svou tvář? Je tvořena rozdílně v rozdílných prostorech.

Když se seznámíme se všemi naivními maticemi jejich spočítáním, budeme studovat jejich součty a rozdíly, což znamená vlastnosti matic majících v každé řádce součet nebo rozdíl dvou jednotkových vektorů. Dříve než přejdeme k

Figure 1.4: Tvář v 8 rozměrném prostoru. Konce jednotlivých vektorů jsou spojené s jejich sousedy přímkami

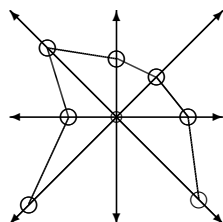
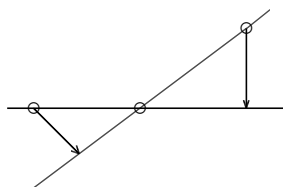


Figure 1.5: Skalární součiny. Oba vektory se vzájemně promítají



maticové aritmetice naučíme se, jak k pracovat maticemi. Nejprve zavedeme maticové součiny.

1.5 Skalární součiny a kvadratické formy

Když máme dva vektory \mathbf{a} , \mathbf{b} , můžeme nalézt vzájemné projekce obou vektorů jako na obr. 1.5.

Projekce jsou známy jako *skalární součiny*. Pokud oba vektory jsou ortogonální, skalární součin je 0 , pokud jsou kolineární, skalární součin je po normalizaci 1 . Nenormalizovaný skalární součin vektoru se sebou samým je známý jako *kvadratická forma*. *Normalizace* znamená, že skalární součin se srovnává s jednotkovou délkou promítnutého vektoru. Skalární součin se zdá tedy být právě kosinem úhlu mezi oběma vektory. Avšak není tomu tak jednoduché, jak se to zdá být.

Slovo součin je spojené s operací *násobení*. Jak se násobí dva vektory? Vezměte vektor sloupec \mathbf{v} a násobte jej vektorem řádkou \mathbf{v}^T . Každý prvek j sloupce se násobí odpovídajícím prvkem i řádky a součiny se sečítají do jednoho čísla. Například: $(1, 1, 1) \times (3, 1, 0)^T$ je napsán ve formě

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 3 \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 4 \end{array}$$

Výsledek byl získán jako $1 \times 3 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 4$. Jinak násobením odpovídajících prvků svisle

$$\begin{array}{ccc} (1, 1, 1) & \times & \\ (3, 1, 0) & & \\ \hline (3, 1, 0) & = & 4 \end{array}$$

Když zaměníme polohy řádky a sloupce, dostaneme stejný výsledek

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 4 \end{array}$$

$3 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = 4$. Když se násobí, prvky jednoho vektoru se váží prvky jiného vektoru. Všechny váhy v prvním příkladě byly 1. Myslím si, že už znáte skalární součiny vektoru sloupce s jednotkovým vektorem-řádkou, poněvadž se používají pro nalezení součtů více čísel napsaných do sloupců. V druhém příkladě váhy byly 3, 1 a 0. Jednotkové prvky dostaly rozdílné váhy. Nebo operace bylo jednoduše $3 + 1 + 0 = 4$.

Pokud vektor se váží sám sebou, dostaneme jeho *kvadratickou formu*

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & 1 \\ & & & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \quad \text{a} \quad \begin{array}{ccc|c} & & & 3 \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ \hline 3 & 1 & 0 & 10 \end{array}$$

Zde máme $1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 1 = 3$ a $3 \times 3 + 1 \times 1 + 0 \times 0 = 10$. Odpovídající prvky obou vektorů se násobí a ze součinů se provede jejich součet. Už znáte výsledek prvního příkladu, poněvadž je to jednoduše součet n jednotek (zde $n = 3$). Zdá se byly elementární, avšak není tomu tak. Připomeňte si, co bylo řečeno o Hilbertově prostoru a analyzujte skalární součin *jednotkového vektoru \mathbf{J}* s jednotkovým vektorem \mathbf{J}^T . (Jednotkový vektor \mathbf{J} je vektor sloupec, jednotkový vektor \mathbf{J}^T je vektor řádka. Všechny jejich prvky jsou 1). Skalární součin je jen součet prvků vektoru, kvadratická forma je čtverec jejich Euklidovského délky. Pokud myslíte, že máme pracovat s odmocninami kvadratických forem, představte si, že jednotkový vektor \mathbf{J} představuje n lidí. Kvadratická forma jen počítá tyto lidi. Máme určit jejich počet jako \sqrt{n} (odmocnina z n)? Zavedli jsme

Hilbertův prostor a budeme pracovat se skalárními součiny a kvadratickými formami jako se základními vektory bez hledání odmocnin.

Ve skalárních součinech ze dvou n (m) rozměrných vektorů jsme získali jen jedno číslo. Násobení snížilo rozměrnost, dostali jsme jen jedno číslo (skalární) určující délku prvního vektoru. Tedy součin vektoru řádky násobený vektorem sloupem zprava (přirozený pořádek obou vektorů, vektor sloupec násobil vektor řádku zleva) se nazývá *vnitřní součin*. Existuje také *vnější součin*. Ten se získá, když zaměníme polohy obou vektorů a násobíme vektor sloupec vektorem řádkou zprava:

$$\begin{array}{c|ccc} & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} & 3 & 1 & 0 \\ \hline 3 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Zde tři jednorozměrné vektory sloupce působily na tři jedno rozměrné vektory řádky. Celý vektor sloupec by vážen všemi prvky vektoru sloupce a jako výsledek byla získaná matice rozměru 3×3 . Místo dvou čísel jsme dostali dvě matice, každou mající 9 maticových prvků. Vnější součin matice se nazývá *tenzor*. Všimněte si, že prvky obou vnitřních součinů se objevily jako diagonální prvky vnějších součinů. Jejich součty, známé jako *stopa matice*, jsou identické s konečnou formou vnitřního součinu.

Skalární součiny se mohou provést z maticových vektorů. Skalární součiny maticových vektorů násobené vektory řádky zleva jsou opět vektory řádky a maticové vektory násobené vektory sloupce zprava jsou opět vektor-sloupce. Násobení snižuje rozměrnost maticového vektoru:

$$\text{vektor-řádka} \times \mathbf{M} = \text{vektor-řádka} \quad (1.8)$$

$$\mathbf{M} \times \text{vektor-sloupec} = \text{vektor-sloupec}. \quad (1.9)$$

Vektor-řádka se násobí zprava postupně všemi sloupci matice a výsledek má tolik míst jako matice sloupců. Vektor-sloupec se násobí zleva postupně všemi řádky matice a výsledek má tolik míst jako matice řádků.

Pokud oba vektory jsou matice, násobení se musí provést pro všechny kombinace řádků a sloupců. Součinem je opět matice. V případě čtverce maticových vektorů, oba součiny mají identické rozměry a odlišnost mezi vnitřním a vnějším prostorem je ztracena.

1.6 Matice v jednotkových rámcích

Kvadratická forma $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ počítá prvky jednotkového vektoru \mathbf{J} . Je současně operátorem

$$\mathbf{J}^T (*) \mathbf{J}. \quad (1.10)$$

Pokud vložíme dovnitř tohoto součinu matici \mathbf{M}

$$\mathbf{J}^T(\mathbf{M})\mathbf{J} \quad (1.11)$$

dostaneme součet prvků matice \mathbf{M} . $\mathbf{J}^T\mathbf{M}$ je n rozměrný vektor řádky a $\mathbf{M}\mathbf{J}$ je m rozměrný vektor sloupce. Příští násobení \mathbf{J} (nebo \mathbf{J}^T) sečítá prvky těchto vektorů.

Když vložíme do (1.10) místo \mathbf{M} jako v (1.11) kvadratické formy $(\mathbf{M}\mathbf{M})^T$ nebo $(\mathbf{M}^T\mathbf{M})$, dostaneme kvadratické formy skalárních součinů $\mathbf{J}^T\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}\mathbf{J}$.

Poznali jsme, že vektor sloupec se transponuje do vektoru řádky a opačně. Pokud opakujeme tuto operaci, dostaneme zpět původní vektorovou formu:

$$(\mathbf{v}^T)^T = \mathbf{v}. \quad (1.12)$$

Matice se transponuje takovým způsobem, že všechny vektory sloupce se transponují do vektorů řádků a opačně. To znamená, že v transponované matici indexy i a j se zamění.

Při transponování součinu dvou matic (vektor řádky nebo sloupec je matice, která má buď $m = 1$ nebo $n = 1$) obě matice vymění si svá místa, tedy

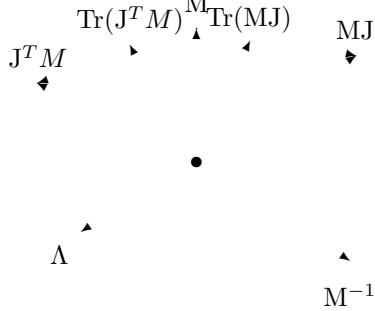
$$(\mathbf{J}^T\mathbf{M}^T)^T = \mathbf{M}\mathbf{J} \text{ a } (\mathbf{M}\mathbf{J})^T = \mathbf{J}^T\mathbf{M}^T. \quad (1.13)$$

Dostaneme dvě kvadratické formy: $\mathbf{J}^T\mathbf{M}^T\mathbf{M}\mathbf{J}$ a $\mathbf{J}^T\mathbf{M}\mathbf{M}^T\mathbf{J}$. Vidíme, že oba součiny mají stejné rámce $\mathbf{J}^T(*)\mathbf{J}$, které působí na maticový součin, který je uvnitř. Tento rámeček počítá jen prvky vnitřní matice. Kvadratické formy $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ jsou zajímavější, než konečný součin, poněvadž každá obsahuje více informace.

Předpokládali jsme, že původní matice \mathbf{M} měla m řádků a n sloupců, obě m a n jsou rozdílné. Tedy transponovaná matice \mathbf{M}^T měla n řádků a m sloupců a byla rozdílná od původní matice \mathbf{M} . řekneme, že takové matice jsou *asymetrické*. obě kvadratické formy jsou symetrické matice. $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ má n řádků a n sloupců, $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ má m řádků a m sloupců. Na stopách obou maticových součinů jsou součty čtverců prvků m_{ij}^2 matice \mathbf{M} . To je Hilbertova délka maticového vektoru a obě stopy, které mají stejné délky leží na kouli s průměrem maticového vektoru. Mimodiagonální prvky obou kvadratických forem tvoří s jejich stopami pravoúhlé trojúhelníky mající obě jednotkové projekce $\mathbf{J}^T\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}\mathbf{J}^T$ jako přepony (obr. 15.1).

Oba skalární součiny transformují matici do vektoru, řádky nebo sloupce. Počítají jednoduše prvky v řádcích nebo sloupcích matice \mathbf{M} . Dávají nám konečné výsledky všech translací, $\mathbf{M}\mathbf{J}$ v m rozměrném prostoru řádek, $\mathbf{J}^T\mathbf{M}$ v n rozměrném prostoru sloupců. Když nalezneme tyto součty, snížíme rozměr prostoru, místo mn prvků máme pouze m nebo n prvků. Když jsme snížili rozměr maticového prostoru, zjednodušili jsme maticový vektor, avšak ztratili jsme informaci o původním pořadí vektorů v matici. A mimo to, alespoň v jednom kvadratickém skalárním součinu, spojili jsme dohromady rozdílné vektory. Pokud tyto vektory představovaly rozdílné věci, sečítáme dohromady jablka s hruškami jako ovoce.

Figure 1.6: Maticová vektorová soustava. \mathbf{M} – maticový vektor, $\mathbf{J}^T \mathbf{M}$ – projekce maticového vektoru do sloupce, $\mathbf{M} \mathbf{J}$ – projekce maticového vektoru do řádky, $\text{Tr}(\mathbf{M}^T \mathbf{M})$ – stopa vektoru, $\text{Tr}(\mathbf{M} \mathbf{J})$ – stopa vektoru, Λ – vlastní hodnoty vektoru, \mathbf{M}^{-1} – inverzní maticový vektor



Maticová vektorová soustava na obr. 15.1 je složena ze samotné matice \mathbf{M} a jejích dvou projekcí, $\mathbf{J}^T \mathbf{M}$ a $\mathbf{M} \mathbf{J}$. Tyto projekce se rozkládají do stop vektorů, $\text{Tr}(\mathbf{J}^T \mathbf{M})$ a $\text{Tr}(\mathbf{M} \mathbf{J})$. Tyto stopy vektorů mají důležitou vlastnost: Mají stejné délky jako samotný maticový vektor \mathbf{M} . Také vektor vlastních hodnot Λ má stejnou délku jako matice \mathbf{M} a může nahradit obě kvadratické formy. Inverzní maticový vektor \mathbf{M}^{-1} , pokud existuje, patří k maticové vektorové soustavě (někdy může být nahrazen zobecněnou inverzní maticí).

Maticový vektor má mn prvků. Se zjednoduší svými projekcemi do oddělených prostorů řádků a sloupců. Ztrácíme v této projekci některé vlastnosti maticového vektoru. Získáváme nějaké informace avšak cenou za to je ztráta jiných informací. Nalezení kvadratické formy odpovídá logické abstrakci. Nejdůležitější vlastností obou kvadratických forem je jejich schopnost nahrazovat maticové vektory. Tato schopnost není pouhou matematickou konstrukcí. Je založena na fyzikální zkušenosti, poněvadž svět, ve kterém žijeme je jednoduše konstruován takovým způsobem.

Abychom to uzavřeli: *Matice odpovídá akci a její kvadratická forma výsledku této akce.*

Obě kvadratické formy mají tuto důležitou vlastnost: štěpí prostor a jeho prvky. Budiž matice \mathbf{M} seznamem n rozdílných knih (s neznámým počtem kopií) patřících m rozdílným osobám. Každá řádka je katalogem i -té osobní knihovny, každý sloupec je seznamem výskytů, která registruje, ve kterých knihovnách j -tá kniha může být nalezena. Kvadratická forma $\mathbf{M}^T \mathbf{M}$ je prostor n knih, na diagonále jsou zde počty knihoven, ve kterých může být nalezena. $\mathbf{M} \mathbf{M}^T$ je prostor knihoven avšak jeho prvky jsou knihy. Srovnejte to se starověkou sentencí, že existuje míra ve všem nebo, že mírou všeho je člověk.

Chapter 2

Konstrukce vektorového prostoru

2.1 Číselné a vektorové stupnice

Z historie matematiky víme, jak pečlivě matematikové konstruovali číselnou osu, zaváděje postupně přirozená čísla, racionální čísla, iracionální čísla. Není nutné připomínat všechny problémy spojené s pojmem kontinua v rozdílných axiomatických systémech. Číselná osa tvoří jedno rozměrný prostor. Příští kroky, vytvoření dvou, tří a více rozměrných prostorů byly provedeny jako odvážný skok tak zvanými kartézskými součinými.

Předpis se zdá být jednoduchý: Vezměte alespoň dva jedno rozměrné prostory a násobte je dohromady. Množinová teorie napravila některé chyby, avšak nespojila své množinové prostory s vektorovými prostory a obě disciplíny zůstaly oddělené.

Když považujeme stupnici přirozených čísel¹

$(0) - (1) - (2) - (3) - (4) - (5)$

a srovnáme ji se stupnicí jednotkových vektorů \mathbf{e}_j $(0) \longrightarrow (1) \longrightarrow (2) \longrightarrow (3) \longrightarrow (4) \longrightarrow (5)$ vidíme, že jediným rozdílem je, že vektorová stupnice je orientovaná a číselná stupnice není.

2.2 Formální operace s množinami vektorů

Zavedli jsme jednotkové vektory \mathbf{e}_j v podkapitole 1.2 jako základní jednotky našeho prostoru. Nejprve dovolíme pouze pozitivní translace odpovídající přirozým číslům. To znamená, že maticový vektor může jít pouze kupředu ze středu koordinát a nikdy zpět. řada následujících vektorů tvoří *cestu*. Všechny možné cesty v tomto prostoru tvoří *mřížku*. Už víme, že musíme rozlišovat mezi cestou a jejím konečným bodem, *polohovým vektorem*. Tato odlišnost je stejná

¹Celá kladná čísla, včetně nuly.

jako mezi čtením a pouhým počítáním slov. Předpokládejme, že máme dvě vektorové řady například

aababac

a

abcaaba .

obě vedou k bodu s koordinátami $(4, 2, 1, 0, 0, \dots)$. Budeme to někdy psát jako $(a^4 b^2 c^1 d^0 e^0 \dots)$. Taková notace je užitečná při některých operacích jako

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 ,$$

kde potřebujeme rozlišovat význam členů $2a$ a a^2 . Násobitel dává počet řad, mocniny určuje délky vektoru. Nyní je výhodné, že základna jednotkových vektorů je 1. Horní indexy mající význam mocnin jednotkových vektorů je nemění. Když přijmeme, že $x^0 = 1$, nulová mocnina vektoru je právě násobitel jedna. Tedy není nutné psát tuto 1, protože nemění součin jako $a \times 1 = 1 \times 1 = a$.

Všechny vektorové řady končící v bodě, jak jsou reprezentované naivní maticí \mathbf{N} , jsou *ekvivalentní*. Jsou definovány matematické operace, které transformují naivní matice v jiné ekvivalentní matice. Pokud tato transformace nedává identické výsledky, potom obě matice náležejí rozdílným třídám. Dvě ekvivalentní naivní matice mající identickou kvadratickou formu $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$ vedou k jednomu bodu. Například

$$(\mathbf{aaba} = (\mathbf{a}^3 \mathbf{b}) = (\mathbf{baaa}))$$

Zde máme první příklad, jak bylo užitečné zavést kvadratické formy. Později budeme definovat jiné třídy ekvivalence naivních matic.

Abychom byli schopni rozlišovat mezi $2a$ a a^2 (mezi paralelními a následnými translacemi), potřebujeme stejný rozdíl také pro konstrukci mnohorozměrného prostoru z jednotkových vektorů. Proto pro vektorové množiny, jednotkové vektory a jejich řady existující *současně*, budeme používat symbol *sčítání* \sum . Pro *následné* vektorové množiny budeme používat symbol pro *násobení* Π . Násobení se mění ve sčítání na logaritmické stupnici. S použitím jednotkové základny logaritmu, číslo a jeho logaritmus jsou totožné, nebo ne? Například

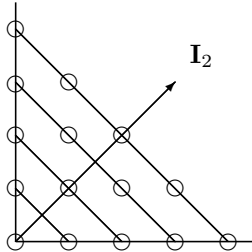
$$\mathbf{aaaaa} = \mathbf{a}^5, \lg_a \mathbf{a}^5 = 5$$

Tato konvence mění pořadí obou operací při konstrukci prostoru. Klasickým způsobem bylo mít dvě osy, řekněme $(1 + a + a^2 + \dots)$ a $(1 + b + b^2 + \dots)$ a násobit je. Jako výsledek dostaneme polohy bodů čtverce

$$\begin{array}{cccc} 1 & a & a^2 & \dots \\ b & ab & a^2 b & \dots \\ b^2 & ab^2 & a^2 b^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Také čtverec se může násobit později třetí osou a získá se tří rozměrná krychle, potom se může použít čtvrtá osa a tak se získají více rozměrné krychle,

Figure 2.1: Dvourozměrný prostor. Jednotkový vektor \mathbf{I}_2 je ortogonální k rovinným simplexům



někdy zvané hyperkrychle. Mohli bychom mluvit o hyperrovinách, hyperhranách a tak dále, avšak nebudeme používat tuto předponu, protože by přefoukla náš text.

Prostor je konstruován postupně ve vrstvách z množiny n jednotkových vektorů představujících n rozměrný prostor. Například:

$$(a+b)^0 + (a+b)^1 + (a+b)^2 + (a+b)^3 + \dots \quad (2.1)$$

Jednotlivé součiny v součtu jsou vektorové řady končící na přímkách ortogonálních k diagonálnímu vektoru \mathbf{I} . Čtverec se stranou $0-2$ se získá z těchto bodů vynecháním bodů a^3 a b^3 z neúplné vrstvy 3 a přidáním 6 řad a^2b^2 ze součinu čtvrté úrovně $(a+b)^4$:

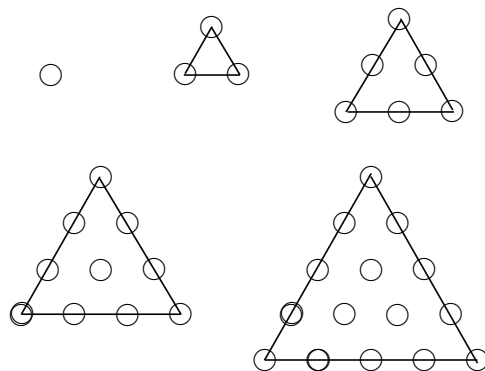
$$\begin{array}{ccc} 1 & a & a^2 \\ b & 2ab & 3a^2b \\ b^2 & 3ab^2 & 6a^2b^2 \end{array}.$$

Čísla u koordinát dávají počty rozdílných vektorových řad vedoucích k danému přirozenému bodu čtverce. Například 3 řady **aab**, **aba**, **baa** vedou k bodu s koordinátami a^2b . Komutativní algebra se získá z nekomutativní jednou algebraickou operací transformující vektorové řady na polohové vektory.

Vektorové řady vytvořené v 2 rozměrném prostoru násobením $(a+b)^m$ jdou k bodům ležícím na přímce ortogonální k diagonále komplexu jako na obr. 2.1. Součet n jednotkových vektorů \mathbf{e}_j násobený m krát je *generátor* vektorového prostoru. Když se použije třírozměrný generátor, vektorové řady jdou k trojúhelníkovým rovinám (obr. 2.2).

Ve vyšších rozměrech by to byly hyperroviny. Opět zkrátíme jejich jména a budeme je skromně nazývat jednoduše roviny ve všech rozměrech. Avšak to opačně znamená, že přímka je rovina v 2 rozměrném prostoru a bod je rovina v 1 rozměrném prostoru. To se může zdát podivné, avšak neomezená rovina dělí svůj prostor do dvou částí. Bod dělí přímku podobně jako přímka rozděluje 2 rozměrnou rovinu na dvě části.

Figure 2.2: První pět 3 rozměrných rovinných simplexů



Naše vektory byly omezeny pouze na přirozená čísla a tedy roviny jsou vytvořeny operátorem

$$\left[\sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j \right]^m \quad (2.2)$$

jsou prvky *přirozeného prostoru*. Ten zahrnuje svou limitu, body s koordinátami a^0b^0 , ab^0 , a^0b a tak dále. Prvky přirozeného prostoru jsou spočetné a se tvoří vektorovými řadami jdoucími k bodům s nezápornými koordinátami. Jednotlivé vrstvy budeme nazývat *rovinné simplex*. Pokud jste slyšeli něco simplexech, potom víte, že simplex v n rozměrném prostoru by měl se určit $(n+1)$ body a my máme jen n bodů. Připomeňte si však, že mluvíme o rovinách. Rovina v n rozměrném prostoru je těleso² v $(n-1)$ rozměrném prostoru a chybějící bod je obnoven.

Roviny zmíněné shora jsou ortogonální k *diagonálnímu jednotkovému vektoru* \mathbf{I} . Je nutné k vysvětlit, proč existují tři jednotkové vektory: \mathbf{I} , \mathbf{J} a \mathbf{J}^T . Ukázali jsme, že jednotkový vektor řádka \mathbf{J}^T a jednotkový vektor sloupec \mathbf{J} mají rozdílné účinky na naivní matice \mathbf{N} , který jsou základními prvky našeho prostoru nebo obecně na jakoukoliv matici \mathbf{M} . Transformují je do vektorů řádků nebo sloupců. Tedy potřebujeme nový jednotkový vektor invariantní k maticím. Tímto vektorem je jednotkový diagonální vektor \mathbf{I} . Je to čtvercová matice mající jednotkové prvky na diagonále, kde oba indexy jsou stejné, $i = j$.

Když jednotková diagonální matice \mathbf{I} násobí jakoukoliv matici buď zleva nebo zprava, tak to zanechává matici nezměněnou:

$$\mathbf{I}\mathbf{M} = \mathbf{M}\mathbf{I} = \mathbf{M}. \quad (2.3)$$

²Můj syn zde navrhol přidat přídavné jméno 'pevné'. Avšak pevné těleso je pevné těleso, zatím co pouhý termín 'těleso' zahrnuje kód, soustava, tedy je to abstraktnější pojem.

Jednotková diagonální matice \mathbf{I} je známá jako *matice totožnosti* a byla už zmíněna ve své sofistikované formulaci jako Kroneckerův symbol δ_{ij} , kde $\delta_{ij} = 1$, pokud $i = j$ a $\delta_{ij} = 0$ jinak.

Pokračujeme s konstrukcí prostoru s použitím rovinných simplexů pokládající následné vrstvy jako v cibuli. Součty rovinných simplexů tvoří *rovinný komplex*. Je určen třemi symbolickými operacemi

$$\sum_{i=0}^m \left[\sum_{j=1}^m \mathbf{e}_j \right]^i. \quad (2.4)$$

Pokud m jde k nekonečnu, dostaneme celý přirozený vektorový prostor daného rozměru.

Srovnaj pořadí operací s tradičním předpisem

$$\prod_{j=1}^n \left[\sum_{i=0}^m \mathbf{e}^i \right]_j \quad (2.5)$$

a uvidíte, že jsme právě obrátili pořadí formálních operací. Násobení v (2.2) se provádí horním indexem i . Avšak získali jsme jiný druh prostoru. Náš prostor vektorových řad je *nekomutativní*, zatím co prostor tvořený mřížkou bodů je *komutativní*. Přejít mezi oběma prostory se provede nalezením skalárních součinů. Tato formální operace odpovídá logické abstrakci jak to bylo ukázáno v předchozí kapitole.

2.3 Vlastnosti rovinných simplexů

Jedno a dvou rozměrné rovinné simplexu jsou triviální. Náš průzkum startuje s počátečními 3 rozměrnými rovinnými simplexu jako na obr. 2.3. 3 rozměrné rovinné simplexu jsou trojúhelníky s 1, 3, 6 a 10 body. Každý vyšší simplex má $(m + 1)$ více bodů, než jeho předchůdce je relativně snadné uspořádat je do 3 rozměrného komplexu. Ten tvoří kladný kónus 3 rozměrného oktogonu jako na obr.2.3.

Vyšší simplexu se liší od nižších nejen přičítáním nové hrany ale také zvýšeným počtem řad vedoucím ke všem bodům vyjma vrcholy.

Pokud srovnáte 3 rozměrný rovinný simplex s 2 rozměrným komplexem, rozdíl mezi nimi spočívá v počtu řad vedoucích k rozdílným bodům. Výchozí bod $(0, 0)$ dává koordinátu $(0, 0, 3)$, body a, b se transformují do ac^2 a bc^2 , a tak dále.

4 rozměrné simplexu jsou tělesa v 3 rozměrném prostoru. Jsou to pravidelné čtyřstěny. Pokud se pokoušíme kreslit je na 2 rozměrné ploše, musíme je deformovat jako na obr.2.4, kde hrany simplexu mají rozdílné délky. A na kresbě uvnitř čtyřstěnu se neobjevují, pokud je nekreslíme ve stereoskopické projekci.

Objevuje se první potíž: Nejsme schopni vytvořit ze 4 rozměrných rovin jejich komplex. Proč? Všechny vrcholy čtyřstěnu musí být ve stejné vzdálenosti od středu soustavy koordinát. Vhodný bod se zdá ležet uvnitř čtyřstěnu,

Figure 2.3: Tři rozměrný rovinný komplex

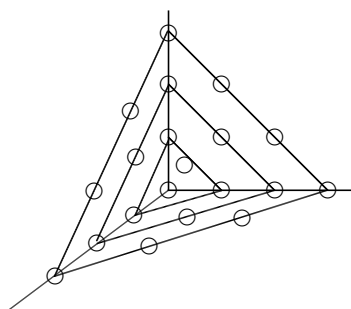
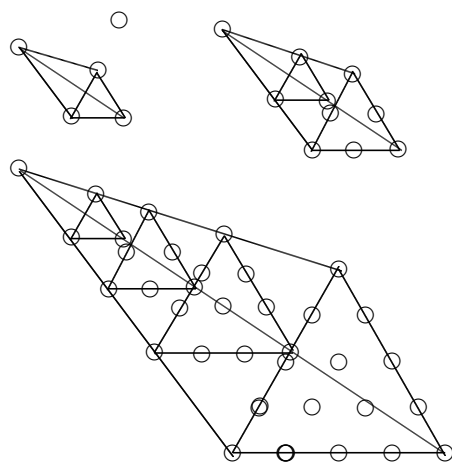


Figure 2.4: První tři 4 rozměrné rovinné simplex a pátý.



avšak středu čtyřstěnu má koordinátu $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$. Střed systému s koordinátou $(0, 0, 0, 0)$ nemůže být uvnitř roviny ale musí ležet mimo ni. úloha nalézt tento bod je podobná úloze lokalizovat Nirvánu. Dýchací cvičení nepomáhají. Poněkud užitečnější je čas. Jenom posuneme celou rovinu z jejího původního místa o jednu jednotkovou délku v naší mysli. Poněvadž tato operace nemá žádnou geometrickou koordinátu, řeší to úlohu.

Ještě větší překážky se musí překonat, když se pokoušíme představit pěti rozměrný rovinný simplex jako na obr. 2.5.

Její obálka se skládá z pěti čtyřrozměrných rovin, čtyřstěnů majících jednu nulovou koordinátu:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & 0 \\ a & b & c & 0 & e \\ a & b & 0 & d & e \\ a & 0 & c & d & e \\ 0 & b & c & d & e . \end{array}$$

Ve 3 rozměrném prostoru čtyřstěnové strany si překážejí. Pokud nakreslíme simplex jako trigonální bipyramidu (obr. 2.5 A), můžeme vidět v jednom okamžiku dva čtyřstěny, řekněme $abcd$ a $abce$, mající společnou stranu abc jako základnu dvou trigonálních pyramid, v jiném okamžiku tři čtyřstěny mající společnou hranu de , která prochází bipyramidou. Avšak to jsou pouze strany simplexu a jeho vnitřek leží mezi těmito pěti čtyřstěny. Musíme je odsunout stranou, než se dostaneme dovnitř. Požaduje to koncentraci, abychom vstoupili do vnitř rovin vyšších rozměrů.

Nebo jeden čtyřstěn se může zploštit, řekněme $abcd$ (obr. 2.5 B) a nad touto deformovanou základnou mají místo čtyři čtyřstěny, které kryjí pyramidu dvakrát, jednou jako dva čtyřstěny $abce$ a $acde$, jednou jako dva čtyřstěny $abde$ a $bcde$. Do 2 rozměrné roviny se 5 rozměrný rovinný simplex promítá jako pentagram (obr. 2.5 C). Ve všech případech rovinný simplex je deformován svým stlačením do méně rozměrného prostoru. V ideálním stavu všechny hrany by měly mít stejné délky.

5 rozměrné rovinné simplex 6 rozměrného rovinného simplexu kryjí svou 3 rozměrnou projekce třikrát. Projekce ve formě tetragonálních bipyramid se mohou rozdělit do dvou pyramid majících společnou stranu $abcd$ jako základnu potom do čtyř simplexů podél osy ef jako dříve u 5 rozměrného simplexu.

Nebo se může zploštit jeden 5 rozměrný rovinný simplex do pravidelného pentagonu a nad touto základnou má místo pět 5 rozměrných rovinných simplexů, které kryjí základnu pentagonální pyramidy třikrát, rohy pentagramu 4 krát a svůj střed 5 krát. To činí analýzu 7 rozměrného rovinného simplexu nesnadnou, poněvadž pentagonální bipyramida je její nejjednodušší model.

čas a trpělivost jsou podstatné, když se analyzují roviny vyšších rozměrů. Rozložte je do podrovin a snižte jejich rozměrnost jako svou domácí úlohu.

Domněnka mimo matematiku: Mnohorozměrné objekty se mohou objevovat v méně rozměrném prostoru pouze neustálou záměnou svých konfigurací. Tedy mikročástice se objevují ve formě vln.

Figure 2.5: Tři projekce 5 rozměrného rovinného simplexu.. A – bipyráma, B – jedna strana čtyřstěnu je zploštěná, C – celý simplex je zploštěn.

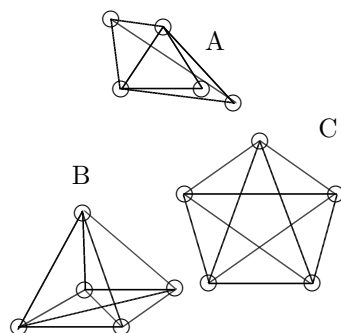
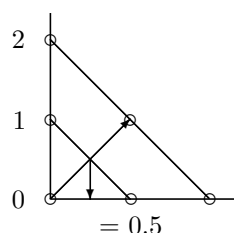


Figure 2.6: Konstrukce racionálních čísel. Vektor $(1, 1)$ protíná první rovinný simplex v bodě s koordinátou $(0.5, 0.5)$.



2.4 Konstrukce číselné osy

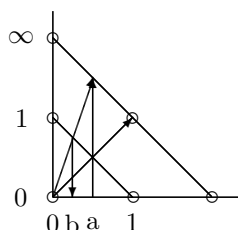
Doposud jsme používali pouze přirozená čísla a vektory. Avšak budeme potřebovat zlomková čísla a vektory. Nyní jsme schopni je zavést, poněvadž máme dosti prostoru pro nutné konstruktivní operace.

Připomeňte si 2 rozměrný komplex (obr. 2.6).

Polohový vektor $(1,1)$ prochází rovinným simplexem $(a+b)^1$ v bodě, který doposud nemá žádné jméno v našem světě. Zavedeme jej nalezením jeho koordinát na obou osách. To se provede s použitím rovnoběžek s oběma osami. Nová čísla jsou definována jako poměr koordináty a polohového vektoru a mocniny jejího simplexu nebo jako poměr koordináty b polohového vektoru a mocniny jejího simplexu.. V příkladě je poměr $1/2$.

Když se tato operace provede se všemi simplexu jdoucími k nekonečnu (nebo ekvivalentně s nekonečným simplexem), dostaneme nekonečně mnoho bodů v intervalu $< 0, 1 >$. Všechny tyto body jsou spočetné indexy i nekonečné roviny. Jsou známé jako *racionální čísla*. Racionální čísla mimo interval $< 0, 1 >$ se získají sečítáním racionálních čísla a přirozeného čísla (nebo násobením).

Figure 2.7: Konstrukce iracionálních čísel. Vektor vedoucí k projekci prvních racionálních čísel a do nekonečného rovinného simplexu má jako koordinátu iracionální číslo b



Samotný nekonečně rovinný simplex zůstal při této operaci nerozdělen, jak byl ve svém přirozeném stavu. Použijeme opět jednu vlastnost Euklidovského prostoru, že totiž rovnoběžky se nikdy nestýkají a přeneseme jemné dělení racionálních čísel z prvního simplexu do nekonečné roviny (obr. 2.7).

Na ni se objeví nové polohové vektory. Protínají jednotkový simplex v bodech, které všechny leží před prvním racionálním číslem. Rozdělují úhel mezi prvním spočetným racionálním vektorem z primárního nekonečného dělení jednotkového intervalu a tedy formě nový množina nekonečně mnoho body na číselná stupnice. Operace se mohou opakovat ad infinitum. První množina iracionálních čísel je dostačující pro reprezentaci *kontinua*. Její prvky nejsou spočetné poněvadž nekonečná zásoba čísel je vyčerpána počítáním prvé úrody racionálních čísel. Nespočetná čísla druhé úrody jsou *iracionální čísla*.

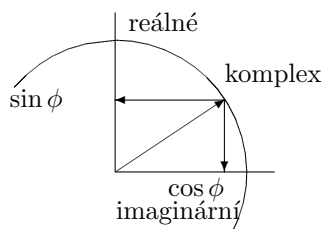
Ostatně potřebujeme taková čísla, která nejsme schopni psát explicitně. Pokud se vrátíme k simplexové rovině a pokusíme se změřit délku vektoru vedoucího k bodu $(0.5, 0.5)$, nebo $(1, 1)$, otočenému na osu, nenalezneme jej mezi racionálními čísly. Odmocnina ze 2 ($\sqrt{2}$) není racionální číslo.

Čísla, která lze získat následnými děleními kontinua a odstraněním desetinné čárky, jsou známá jako *čísla alef*. V Euklidovském prostoru všude a vždy platí, že $1 \times 1 = 1$. Nikde součin není iracionální číslo větší nebo menší, než 1.

2.5 Komplexní čísla

Ukázali jsme, že maticový vektor \mathbf{M} se může promítnout na jednotkový vektor řádku \mathbf{J}^T nebo sloupec \mathbf{J} a že kvadratické formy $\mathbf{M}^T\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}\mathbf{M}^T$ se mohou rozdělit do pravoúhlých trojúhelníků. To platí pro maticové vektory, ve kterých všechny prvky jsou buď kladné nebo záporné. Pokud maticový vektor obsahuje čísla obou znamének, jeho projekce je kratší, než samotný maticový vektor. Potom přepona pravoúhlého trojúhelníka (obr. 1.2), reprezentované stopou kvadratické formy, je delší, než vnější součin, kde mimodiagonální prvky tvoří odvěsnu. Mimodiagonální prvky mohou být buď kladné nebo záporné. Například:

Figure 2.8: Komplexní čísla. Jsou složena z reálné a imaginární části



| | -3 | -2 | 1 | Σ |
|----|----|----|----|----|
| 3 | 9 | -6 | 3 | 6 |
| -2 | -6 | 4 | -2 | -4 |
| 1 | 3 | -2 | 1 | 2 |
| Σ | 6 | -4 | 2 | 4 |

Stopa = 14.

Délka diagonálního vektoru (stopa) je 14, délka mimodiagonálního vektoru (součet mimodiagonálních prvků) je -10 , délka vnějšího součinu (projekce na jednotkový vektor) je 4, to znamená, že je kratší, než samotný vektor. Záporný součet mimodiagonálních prvků ukazuje, že od jejich součtu musí být odečten od stopy nemá se k ní přičítat. To mění konstrukci trojúhelníka.

Patrně jste slyšeli o imaginárních číslech i , odmocninách ze záporného čísla $\sqrt{-1}$. Když se objevila jako možné řešení kvadratických rovnic, matematikové se jich obávali jako duchů. Pouze později Euler ukázal, jak mohou být zkrocena jejich mapováním na komplexní rovinu (obr. 2.8).

Nyní, pokud máme číslo z ve formě

$$z = (x + iy) \text{ nebo } z = r(\cos \phi + i \sin \phi), \quad (2.6)$$

můžeme je rozdělit do pravoúhlého trojúhelníka a nahradit lineární vektor rovinným vektorem, který je vždy složen ze dvou prvků, jednoho reálného a jednoho imaginárního. Existují zvláštní pravidla pro počítání s komplexními čísly a zejména maticemi obsahujícími komplexní čísla.

2.6 Vytvořující funkce

Ukázali jsme jak se komplex konstruuje ze svých simplexů. Tato technika se používá intensivně v kombinatorice pro vytvořující funkce. Prostor je definován nějakým funkčním vztahem, obvykle součtem nebo součinem, jehož argument jde od 0 až ∞ . Vytvořující funkce se vyhodnocuje s falešnou proměnnou, například t , a vypočtou se koeficienty při rozdílných mocninách t .

Poněvadž řady $\mathbf{x}_a \mathbf{x}_b$ a $\mathbf{x}_b \mathbf{x}_a$ jsou nerozlišitelné v komutativním procesu, bylo považováno za nemožné formulovat vytvářející funkci, která by ukazovala pořadí symbolů v součinech (permutace). Nicméně enumerátory se snadno naleznou ve formě

$$\sum_{k=0}^n t^k / k! . \quad (2.7)$$

Tyto enumerátory jsou známy jako exponenciální vytvářející funkce.

Je možné provádět rozdílné algebraické operace s vytvářejícími funkcemi, například nalézt jejich součty, součiny, atd.. Odpovídající operace jsou známy jako Cauchy Blissardovy algebry. Existuje mnoho koncepčních problémů spojených s konvergencí nekonečných sérií pro rozdílné argumenty. Zjednodušíme je s použitím jednotkových vektorů a vlastností Euklidovského prostoru. Pouze výjimečně zmíníme nějaké deformace ideálního prostoru.

2.7 Zobecněné jednotkové vektory

S použitím jednotkových vektorů \mathbf{e}_j zúžili jsme možnosti kalkulu. Zjednodušení má mnoho výhod avšak musí se za ně platit. Některé vzorce v příštích kapitolách jsou správné i když \mathbf{e}_j není 1 avšak jakékoliv číslo. Například $(a + b + c)^k$ se může vyhodnotit jako $(1 + 2 + 3)^k$ stejně jako $(2.1 + 0.1 + 5)^k$ v závislosti na skutečných hodnotách proměnných. Platí i pro geometrické reprezentace proměnných. Je možné si představit, jakoby prostor byl elastický a jeho mřížka se mohla napínat, jak je potřeba. Každý zvláštní případ se může rozdělit do částí, která je isomorfní s ideálním případem, a do zvláštní distorze jednotkových vektorů.

2.8 Trigonometrické funkce

Budeme diskutovat krátce trigonometrické funkce, sinus, cosinus, tangens a kotangens. Spojují hodnoty úhly v pravoúhlého trojúhelníka s podíly odvěsen k přeponě. Pokud α je úhel odvěsny b a přepony c , její protilehlá strana je a , pak definice trigonometrických funkcí jsou

- $\sin \alpha = a/c$
- $\cos \alpha = b/c$
- $\tan \alpha = a/b$
- $\cot \alpha = b/a = 1/\tan \alpha$
- $\sin \alpha = \cos \beta$.

Strany obou úhlů mění své polohy.

Vzorec

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

je ve skutečnosti Pythagorova věta ve formě:

$$(a/c)^2 + (b/c)^2 = (c/c)^2,$$

nebo

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

2.9 Přirozená čísla a číslovky

Dvě základní definice přirozených čísel jsou Peanova axiomatická a von Neumannův množinový model. Obě definice jsou přísně funkční, nedbají na vztahy mezi čísly a číslovkami jako přirozenými jmény přirozených čísel a jejich psané formy, jejich notace.

Peano definoval přirozená čísla algoritmem, který tvoří z čísla k větší číslo přičítáním jednotky ($k + 1$). Je to jemný přístup, který jsme už využili pro vytvoření prostoru, kde místo 1 se přidala nová simplexová vrstva.

Von Neumannův množinový model vytváří čísla počítáním množiny. Prázdná množina 0 má jeden prvek, to vytváří 1. Množina obsahující 0, 1 má dva prvky, to vytváří 2, a tak dále.

Všechny jazyky, které znám, mají číslovky k pro čísla 0 až deset. Číslovky pro 11 – 19 se tvoří jako $(10 + k)$ například v angličtině fourteen. Eleven a twelve jsou deformovány, poněvadž se používala často.

Násobky desítek jako jedna číslovka tvořená jako $(k \times \text{ty} = \text{ten})$, například forty. Sta a tisíce se počítají odděleně, potom pouze kilonásobky tisíce (milion, ...) mají své vlastní číslovky. Čísla mezi těmito pivoty se vyjadřují jako lineární kombinace základních číslovek.

Ovšem existují výjimky, jako zmíněných 11 a 12. Například deformace a výjimky číslovek se objevují do sta v Hindí. Staří Egypťané měli zvláštní jména a hieroglyfy pro desítky.

Notace číslic měla rozdílné formy: V primitivní formě, jeden zářez na holi odpovídal každému sečtenému objektu. Egypťané zavedli zvláštní znaky pro mocniny 10 až 10^7 , avšak číslovky jedna až devět vyjadřovali primitivně znakem odpovídajícím číslu. Féničané zavedli písmena pro 1 – 9, 10 – 90 a 100 – 900. To zkrátilo významně notaci. Tento soustavu převzali Hebrejci a Řekové. Římané používali svůj vlastní soustavu. Specifické symboly byly omezeny na I, V, X, L, C, D, M a počet nutných symbolů v jedné číslovce s použitím polohové soustavy IV = jedna ruka bez jednoho prstu, IX = dvě ruce bez jednoho prstu. Konečně máme Indicko arabskou decimální polohovou soustavu.

Měli bychom zmínit mayskou dvacítkovou soustavu s polohovou notací, kde nula s číslovkou znamenala násobení 20 krát (quatre-vingt v francouzštině) babylonskou nedesátkovou soustavu (německy Schock, česky kopa), kde mocniny tří dvacítek se vyjadřovaly velikostí jejich symbolu (srovnej tučet – veletučet – velký veletučet).

Číslovky, to je jména čísel, jsou vytvořeny modulární soustavou, která je založena na našich prstech. Počítáme množiny jejich shrabováním našima rukama a tímto přirozeným způsobem mluvíme a myslíme o číslech v decimální soustavě. Definice přirozených čísel by měla vyjádřit tento fakt. Tedy navrhuji následující definici:

Přirozená čísla jsou vytvořena sérií modulárních operací, srovnávajících dvě množiny, porovnávanou množinu n a modulární množina m .

Prázdná množina 0 je ze zřejmých důvodů nevhodná jako modulární množina m .

Množina 1 jako modulární množina m vytváří pouze přirozené číslo 0, poněvadž

$$n \bmod 1 \equiv 0.$$

Množina 2 vytváří přirozená čísla 0 a 1.

S použitím dosti velké modulární množiny m dostaneme v jedné modulární operaci všechna přirozená čísla. Avšak je to nepohodlné, poněvadž nemáme pro ně neomezenou zásobárnu jednoduchých symbolů a číslovek. Proto se musí použít série modulárních porovnávání, jejíž výsledkem je série modulárních identit. Polohová notace vede k modulárním rovnostem:

$$135 \bmod \{10 = 135$$

$$135 \bmod \{4 = 2013$$

Napsaná forma čísla se získá sérií následných dělení s modulárními zbytky

- $135 : 4 = 33 + 3$
- $33 : 4 = 8 + 1$
- $8 : 4 = 2 + 0$
- $2 : 4 = 0 + 2$

Výsledné číslo modulu 4 je tvořeno jako polohová kombinace všech modulárních zbytků napsán od prvního zprava doleva, kde je napsán poslední zbytek³ = 2013.

Ačkoliv množina 1 se zdá být přirozenou základnou číselné soustavy a objekty v množinách už existují takové formě, série modulární porovnávání s 1 dává pouze sérii nul. Dělení jednou nesnižuje digitální velikost čísla a nestlačuje jeho notaci. Proto takové číselná soustava je nepraktická. Binární soustava je prvou použitelnou.

Modulární operace je podstatně mechanickou. V prvním kroku řádek prvky se rozseká do řádků podle daného modulu. Poslední řádka, která je neúplná (může být prázdná) je výsledek modulární operace

$$\begin{array}{rcll} ***** & \bmod & **: & ** \\ & & & ** \\ \text{Zbytek} & & * & = 1. \end{array}$$

³Toto semitské psaní bylo přijaté od Féníčanů.

Jeden sloupec úplných řádků se transponuje do řádku a operace se opakuje

$$\begin{array}{ccc} ** & \text{mod} & **: \quad ** \\ \text{Zbytek} & & 0 = 0. \end{array}$$

Jeden úplný sloupec získaný druhou modulární operací se opět podobně srovnává dokud všechny prvky se nevyčerpají

$$\begin{array}{ccc} * & \text{mod} & **: \quad 0 \text{ (počet úplných řádků)} \\ \text{Zbytek} & & * = 1. \end{array}$$

Výsledkem je binární notace $***** = 101$. Třetí modulární operace byla ve skutečnosti dělením druhé mocniny dvou, třetí zbytek dává počet čtyřek v původní množině. V binární notaci jsou určeny svou třetí polohou od poslední číslice udávající počet $1 = 2^0$. Číslo menšího modulu je současně číslem většího modulu. Binární číslo čtyři vypadá jako dekadické číslo sto ($4 = 100$).

Dvě přirozená čísla jsou stejná, pokud se získají ze stejné množiny n , a jsou srovnatelná, pokud jsou určena s použitím stejné modulární množiny m .

V porovnání s von Neumann množinovým modelem, kde spojené množiny $0, 1$ vyvolávají číslo 2, zde vytvářející množina 2 kryje čísla 0 a 1.

Výhody navržené definice jsou zřejmé: přirozená čísla jsou vázána s kardinálními číslovkami algoritmem, který ukazuje, jak se tvoří jména a notace přirozených čísel z číslovek. Je to logické: čísla, která jsou popsána v přirozeném jazyce kombinacemi kardinálních číslovek jsou přirozená čísla.

Chapter 3

Lineární operátory

3.1 Úvod

Vektory jsou operátory, které posouvají bod na jiné místo v prostoru. V této kapitole budeme diskutovat speciální operátory, které působí na množiny bodů nebo na množiny vektorů jakoby byly jedním bodem nebo pevným tělesem. Některé z těchto operací byly už zmíněné, avšak nyní se jim dostane systematictější pozornosti. Nicméně některé důležité vlastnosti operátorů se stanou jasnější pouze později, po zavedení grafových operátorů a jejich využití k dosažení praktických výsledků.

Operátory se mohou rozdělit do *aditivních*, jako jsou vektory translace, a *multiplikativních*, jako jsou skalární součiny. Je možné jiné hledisko klasifikace v závislosti na tom, tolik matic nebo vektorů je postiženo. Operace může probíhat uvnitř jedné matice, nebo jeden maticový operátor může působit na jiný vektor nebo matici. Vzpomeňte si, že vektor řádka nebo vektor sloupec jsou matice s jen jednou řádkou nebo sloupcem.

3.2 Transponování a transverzování

Transponování maticových vektorů už bylo definováno. Mění jednoduše řádkové indexy i a sloupcové indexy j všech maticových prvků

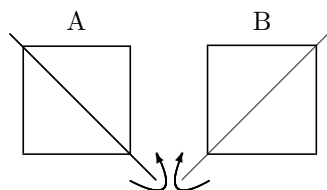
$$\mathbf{M}^T \rightarrow m_{ij}^T = m_{ji} \quad (3.1)$$

Pokud $\mathbf{M}^T = \mathbf{M}$, matice je *symetrická*. Tato vlastnost má důležité důsledky pro jiné vlastnosti matice. Je zajímavé, že transpozice mění pořadí členů v maticových součinech:

$$(\mathbf{ABC})^T = \mathbf{C}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T. \quad (3.2)$$

S transpozicemi je spojený koncepční problém. Přijali jsme konvenci, že řádky matice znamenají pořadí v čase, následnost, zatím co sloupce jsou uspořádány

Figure 3.1: Transponování (A) a transverzování (B) matice



v prostoru jako ortogonální vektory. Transpozice mění toto pořadí. Avšak vzpomeňte si na knihu. Všechna slova existují současně, jsme pouze nuceni, abychom je četli postupně četli. Podobnou funkci má ve vektorovém prostoru čas, není to konvenční čas, který se měří hodinami. Všechny prvky matice existují současně ve všech okamžicích. Jinak bychom potřebovali jinou algebru.

Druhá operace zde zavedená, *transverze*, se v učebnicích nevyskytuje, avšak potřebujeme ji k jednoduchým důkazům bez výpočtů některých kombinatorických identit. Transverze mění pořadí obou indexů, což znamená, že řádky a sloupce se počítají odzadu. Pokud transponování otáčí prvky matice okolo hlavní diagonály $m_{11} \rightarrow m_{nn}$, transverze je otáčí okolo diagonály (její jméno bude transverzála) $m_{1n} \rightarrow m_{n1}$ (obr.3.1). Nahlížíme nejvzdálenější roh matice jako její výchozí bod.

3.3 Translace a permutace

Překládáme větu z jednoho jazyka do jiného, nebo ji překládáme jako blok z jednoho místa v textu na jiné místo. Podobně můžeme překládat vektory nebo jejich řady. Nyní musíme nalézt techniky, jak vyjádřit rozdílné druhy translace abstraktním způsobem. Zásadně existují dvě možnosti, jak takové translace se mohou uskutečnit. Operátory mohou být aditivní nebo multiplikativní.

Aditivní operátor se definuje jako rozdíl. Vezmeme dva stavy maticového vektoru, původní \mathbf{M}_1 a konečný \mathbf{M}_2 a hledaný operátor \mathbf{S} je jejich rozdíl:

$$\mathbf{S} = \mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1 . \quad (3.3)$$

Například

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 & \mathbf{S} \\ \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}$$

Vypadá to triviálně, avšak speciální větev matematiky, teorie grafů, studuje pouze tyto operátory a vektory k nim ortogonální. Podle naší konvence řádka

Figure 3.2: Reprezentace orientovaných a neorientovaných hran jako vektorových součtů nebo rozdílů

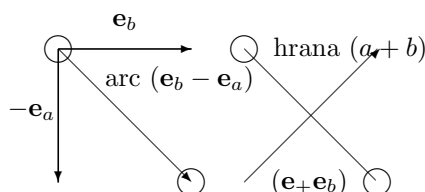
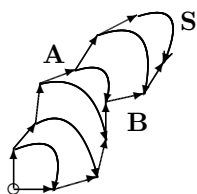


Figure 3.3: Rozdíl dvou vektorových řad \mathbf{A} a \mathbf{B} tvoří plochu \mathbf{S}



přesouvá jeden symbol na jiný. To odpovídá kódování zprávy, v transponované formě tvářím ukázaným na obr. 1.4.

Každá řádka operátor \mathbf{S} je rozdíl dvou jednotkových vektorů \mathbf{e}_j . Záporné \mathbf{e}_a jde od vrcholu a zpět ke středu a cesta prostorem pokračuje vektorem \mathbf{e}_b k vrcholu b . Výsledná simultánní translace je vektor jdoucí přímo z vrcholu a k vrcholu b bez dotknutí se středu (obr. 3.2).

Jednotkové vektory \mathbf{e}_j jsou *primární* vektory, jejich součty nebo rozdíly s_{ij} jsou *sekundární* vektory. Jejich prostor je otočen v úhlu 45° k primárnímu prostoru. Ke každému součtu $(i+j)$ náleží dva rozdíly, $(i-j)$ a $(j-i)$.

Operátor \mathbf{S} je řada takových sekundárních vektorů. Tyto vektory tvoří hrany rovinného simplexu n^1 . Nevycházejí ze středu k nějakému bodu prostoru, avšak mění vektorovou řadu v jinou jdoucí k stejnému simplexu. Poněvadž obě vektorové řady jsou kontinuální cesty, operátor, který překládá jednu v druhou leží na ploše v n rozměrném prostoru (obr. 3.3).

Součet dvou jednotkových vektorů $(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_i)$ je ortogonální k rozdílu $(\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i)$ a odpovídající matice $\mathbf{G} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2$ se liší od matice \mathbf{S} pouze kladnými znaménky dávajícími do vztahu obě jednotkové vektorové řady. Poněvadž každý následný prvek v řadě je ortogonální, \mathbf{G} představují vektory ortogonální k operátorům \mathbf{S} . Matice \mathbf{G} jsou lineární vektory ortogonální k ploše operátoru \mathbf{S} . Tvoří sekundární vektorový prostor, který není úplný, jako uvidíme v druhé části této knihy.

Prvé multiplikativní operátory umožnily vytvořit náš prostor. Jsou určeny

vlastnostmi zvláštní třídy naivních matic \mathbf{N} , které mají jeden jednotkový symbol nejen v každé řádce avšak také v každém sloupci. Tyto matice \mathbf{P} jsou známy jako *jednotkové permutační matice*. Jednotková diagonální matice \mathbf{I} k nim patří. Všechny permutační matice jsou čtvercové matice tvořící grupy S_n permutačních matic s n řádky a sloupci. Když se matice násobí permutační maticí zprava, tato operace mění pořadí sloupců násobené matice. Například

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|--|-------|---|---|---|
| | | | | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | | | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | | | | 0 | 0 | 0 | 1 |
| | | | | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | <hr/> | | | |
| 1 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | | 0 | 0 | 0 | 1 |

První sloupec se objeví v součinu jako druhý, poněvadž matice \mathbf{P} má 1 v druhém sloupci první řádky. Poslední (nulový) sloupec se podobně přemístí na prvé místo posledním jednotkovým prvkem v prvním sloupci.

Násobení zleva mění pořadí řádek násobené matice. Například

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|--|-------|---|---|---|
| | | | | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| | | | | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| | | | | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| | | | | | <hr/> | | | |
| 0 | 1 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | | 1 | 0 | 0 | 0 |

Na obr. 3.4, kde jsou zobrazeny účinky 6 permutačních matic grupy S_3 na třírozměrný rovinný simplex, můžeme vidět účinek takového násobení sloupce. Jednotková diagonální matice nechává simplex nezměněný, dvě matice ji otáčejí podél jejího středu a tři matice mění polohy pouze dvou vrcholů jakoby se trojúhelník zrcadlil podél roviny ortogonální k odpovídající hraně (nebo se otáčel podél osy ležící v rovině). To jsou *operace symetrie*. Budou studovány později podrobněji.

Všechny permutační matice s n řádky a sloupci se získají jako následná otočení a tvoří cyklické grupy S_n . Otáčejí vektory v cyklech a po daném počtu opakovaných operací vektory se vrátí zpět do svých původních poloh.

3.4 Inverzní prvky

Když máme číslo, řekněme 5, můžeme definovat jeho inverzní prvek opět dvěma způsoby, aditivním a multiplikativním. Podobně se prvky mohou definovat pro

Figure 3.4: Grupa symetrie S_3 . A – identita, všechny prvky zůstávají na svých místech; B, C, D – reflexe, dva prvky si zamění svá místa; E, F – otočení, tři prvky vymění si svá místa v cyklech

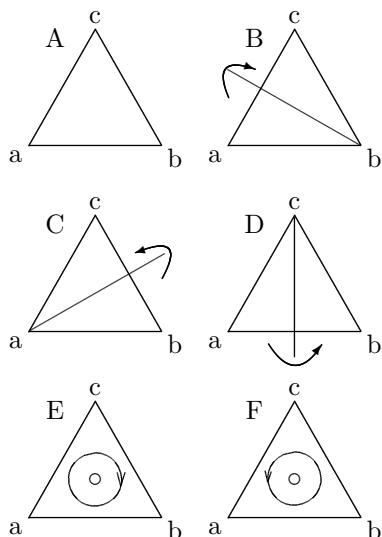
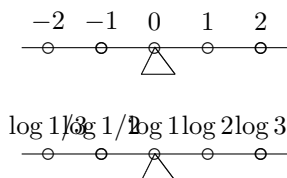


Figure 3.5: Aditivní a multiplikativní vyvažování čísel



vektory.

Inverzní operace ke sčítání je odečítání. Číslo 5 se získalo z 0 přičtením 5 a obnovíme původní situaci odečtením 5: $5 + (-5) = 0$. Inverzní aditivní prvek 5 je (-5) a inverzní aditivní prvek (-5) je 5. Můžeme si představit tato čísla na váze (obr. 3.5). Aditivní inverzní prvky jsou jen vektory kolineární s původními vektory, mající stejné délky avšak opačný směr. Tvoří se záměnou znaménka vektoru.

Nyní můžeme uvažovat inverzní prvek pro operaci násobení:

$$a \times a^{-1} = a^0 = 1 .$$

Když použijeme logaritmickou stupnici dostaneme

$$\log a + \log a^{-1} = \log 1 = 0.$$

Z toho zjistíme, že $a^{-1} = 1/a$. Na číselné stupnici inverzní prvky čísel větších než 1 jsou v intervalu (0,1), který se zdá být nevyvážený, viz obr. 3.5, avšak je vyvážený na logaritmické stupnici.

Zdá se, že je snadné nalézt inverzní vektory k vektorům-sloupcům (nebo vektorům-řádkům). Musí dát jednotkový skalární součin, například:

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 3 \\ & & & 1/2 \\ & & & 1 \\ \hline 1/6 & 1 & 0 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} & & & 1/6 \\ & & & 1 \\ & & & 0 \\ \hline 3 & 1/2 & 1 & 1 \end{array}$$

Avšak takové inverze mají jednu podstatnou nevýhodu: Nejsou jedinečné. Existuje nekonečně mnoho takových inverzí, které vyvažují každý vektor-sloupec (nebo každý vektor-řádku), tedy jsou *neurčitě*, například jiné vhodné řešení je:

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 3 \\ & & & 1/2 \\ & & & 1 \\ \hline 1/9 & 2/3 & 1/3 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|c} & & & 1/9 \\ & & & 2/3 \\ & & & 1/3 \\ \hline 3 & 1/2 & 1 & 1 \end{array}$$

Pokud se pokoušíme nalézt levou (pravou) inverzní matici, její řádky musí být levé (pravé) inverze pro odpovídající sloupce (řádky), avšak současně nulové vektory pro jiné sloupce (řádky). V daném případě nulový vektor je opět neurčitý:

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 3 \\ & & & 1/2 \\ & & & 1 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 0 \\ -4/3 & 2 & 3 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & -4/3 \\ & & & 0 & 2 \\ & & & -3 & 3 \\ \hline 3 & 1/2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

Jiná potíž s inverzní prvky vektorů je, že nemůžeme nalézt pravou inverzi k vektoru-sloupci (levou inverzi k vektoru-řádce):

$$\begin{array}{ccc|ccc} & & & ? & ? & ? \\ & & & ? & ? & ? \\ & & & ? & ? & ? \\ \hline 3 & 1 & 0 & 0 & ? & ? & ? \\ 1/2 & 0 & 1 & 0 & ? & ? & ? \\ 1 & 0 & 0 & 1 & ? & ? & ? \end{array} \quad \begin{array}{ccc|ccc} & & & 3 & 1/2 & 0 \\ \hline ? & ? & ? & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Byla by tu $1/3$ jako první inverzní prvek m_{ij}^{-1} , avšak nemůže se vynulovat v následujících řádcích v prvním sloupci. Pro její vynulování bychom potřebovali nějaké nenulové prvky v druhém a třetím sloupci levá matice. Pro maticové vektory můžeme, alespoň někdy, nalézt matice, které transformují všechny jejich vektor sloupce do diagonální matice. Jeden vektor sloupec nemá žádnou inverzi zprava, avšak jejich soustava ji má. Které vlastnosti matice musí mít, aby byla invertovatelná. Budou ukázané později. Pokud matice má obě inverze, zleva i zprava, potom obě inverze jsou identické a existuje pouze jedna inverze, jejíž akce je stejná z obou stran. To je pravá inverze dané matice.

Mohli bychom hledat inverze náhodným zkoušením náhodným vhodných vektorů. Lepší je použít nějaké ověřené algoritmy, které budou zavedeny později.

Matice mající inverzi je *regulární* nebo *nesingulární*. Nesingulární matice nemají žádné nulové vlastní hodnoty a vlastní vektory a singulární matice mají alespoň jednu nulovou vlastní hodnotu a vlastní vektor. *Vlastní vektor* je vektor, ve kterém se všechny prvky násobí, pokud se vektor násobí danou maticí, stejnou hodnotou, která se nazývá *vlastní hodnota*. Například

| | | | | | | |
|----|----|----|-------|---|----|----|
| | | | | 1 | 1 | 1 |
| | | | | 1 | -2 | 0 |
| | | | | 1 | 1 | -1 |
| | | | Π | 0 | 3 | -1 |
| 1 | -1 | 0 | | 0 | 3 | 1 |
| -1 | 2 | -1 | | 0 | -6 | 0 |
| 0 | -1 | 1 | | 0 | 3 | -1 |

První sloupec je nulový vlastní vektor, všech hodnoty součinu v jeho sloupci jsou nulové, vlastní hodnota druhého vlastního vektoru je 3, vlastní hodnota posledního vlastního vektoru je 1. Existuje ještě jiná podmínka pro vlastní vektory, viz příští oddíl.

Některé nesingulární matice jsou snadno rozpoznatelné. Pokud matice má všechny nenulové prvky pod nebo nad diagonálou a všechny diagonální prvky jsou jednotkové prvky, potom je nesingulární. Inverze v tomto případě se může jednoduše nalézt technikou známou jako *princip inkluze a exkluze*. Předpokládejme, že k řádků už bylo vyváжено. V příští řádce skalárního součinu vektoru řádky s inverzní maticí sloupcem (předpokládá se násobení zprava) budou nevyvážené některé hodnoty. Musíme k tomu přidat nebo odečíst tolik prvků, abychom dostali nulové mimodiagonální prvky. Například (nulové symboly jsou vynechány)

| | | | | | | |
|---|---|---|--|----|----|---|
| | | | | 1 | | |
| | | | | -2 | 1 | |
| | | | | 1 | -2 | 1 |
| 1 | | | | 1 | | |
| 2 | 1 | | | | 1 | |
| 3 | 2 | 1 | | | | 1 |

Zde váhy druhé řádky jsou $1 \times 2 - 2 \times 1 = 0$ a $1 \times 1 = 1$. Podrobně bude problém inverzních matic pojednán v kapitole 16.

3.5 Diagonalizace matic

Inverzní matice transformuje matici \mathbf{M} na diagonální jednotkovou matici \mathbf{I} . Existuje však ještě jiná forma diagonalizace. Tato operace vyžaduje simultánní akci dvou matic z obou stran matice, která se má diagonalizovat

$$\mathbf{L}(\mathbf{M})\mathbf{R} = \Delta(\mathbf{M}). \quad (3.4)$$

$\Delta(\mathbf{M})$ je diagonální matice, která má všechny mimodiagonální prvky nulové. Matice v závorkách je zdrojem diagonálních prvků.

Součin $\mathbf{M}\mathbf{M}^{-1}$ by byl příkladem diagonalizace matice, kde diagonalizovanou maticí je jednotková diagonální matice \mathbf{I} . Při diagonalizaci matice je potřeba, aby akce matice \mathbf{L} zleva byla vyvážena násobením matice \mathbf{R} zprava. Diagonalizační matice tvoří rámec pro matici \mathbf{M} .

Představte si, že pozorujete matici jako mezi dvěma polarizujícími filtry. Když filtry otočíte, pohled se vyjasní nebo ztmavne, avšak při jedné poloze filtru je transparentní. Takové transparentní matice hledáme. Obě diagonalizační matice působí jako polarizující filtry, snižují mimodiagonální prvky a zvyšují diagonální. Diagonální matice je transparentní, poněvadž diagonální prvky nejsou zatemněny mimodiagonálními. Připomeňte si obr. 15.1. Získaná diagonální matice je ekvivalentní k matici \mathbf{M}

Zvláště užitečný účinek se získá, když součin obou diagonalizačních matic \mathbf{L} a \mathbf{R} je jednotková diagonální matice

$$\mathbf{LR} = \mathbf{I}, \quad (3.5)$$

nebo ekvivalentně, když jejich akce nemění jednotkovou diagonální matici v jejich rámečku:

$$\mathbf{LIR} = \mathbf{I}.$$

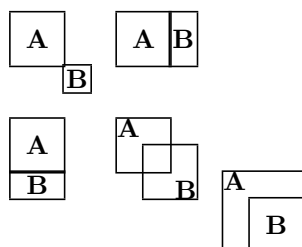
Potom, pokud mimo to

$$\mathbf{L} = \mathbf{R}^T, \quad (3.6)$$

pak tyto matice jsou *vlastní vektory* dané matice. Diagonální matice získané jako výsledek takového násobení jsou známé jako matice *vlastních hodnot*. Součet vlastních hodnot je rovný stopě diagonalizované matice a diagonální matice vlastních hodnot je ekvivalentní maticovému vektoru diagonalizované matice.

Vektorová množina používaná pro nalezení vlastních hodnot dává diagonální matici, nikoliv však jednotkovou matici \mathbf{I} :

Figure 3.6: Uspořádání matic podle svých indexů



| | | | | | | |
|---|----|----|--|-------|----|----|
| | | | | 1 | 1 | 1 |
| | | | | 1 | -2 | 0 |
| | | | | 1 | 1 | -1 |
| | | | | <hr/> | | |
| 1 | 1 | 1 | | 3 | 0 | 0 |
| 1 | -2 | 1 | | 0 | 6 | 0 |
| 1 | 0 | -1 | | 0 | 0 | 2 |

Vlastní vektory se musí nyní normalizovat dělením odmocninami $1/3$, $1/6$, $1/2$. Normalizované vlastní vektory jsou

$$\begin{pmatrix} \sqrt{1/3} & \sqrt{1/6} & \sqrt{1/2} \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{-4/6} & \sqrt{0} \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{1/6} & \sqrt{-1/2} \end{pmatrix}$$

Vlastní hodnoty a vlastní vektory nejsou abstraktní matematickou konstrukci, ale výsledkem praktické zkušenosti. Vlastní hodnoty jsou známé z fyzikálních a technických věd. Vlastní vektory jsou známé jako faktory, když se používají v kapitole 15.

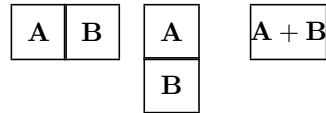
3.6 Maticová aritmetika

Součty a rozdíly y byl už diskutovány. Je důležité prozkoumat aritmetiku matic pečlivěji, protože v učebnicích můžete nalézt rozdílná omezení, jak se matice mohou kombinovat.

Aritmetická operace maticemi jsou obvykle omezeny na matice s identickými rozměry, mající stejný počet řádků a sloupců. To je příliš přísné pravidlo. Dříve než zavedeme méně přísné pravidlo, prozkoumáme všechny možné případy, v jakých vztazích matice mohou být, pokud jejich indexy obsahují jejich pravé hodnoty, jako kdyby se porovnávaly a uspořádaly dva dokumenty (obr.3.7).

Řádkové indexy jdou v každé matici od 1 do m , sloupcové indexy jdou v každé matici od 1 do n . To je vnitřní indexování. Podobně jako židovské,

Figure 3.7: Možnosti sčítání a odečítání matic



křesťanské a islámské letopočty, množiny indexů v porovnávaných maticích nemusí být stejné, nebo jedna množina může být stejná, nebo obě množiny mohou souhlasit. Tedy pravidlo maticové aritmetiky pro sčítání a odečítání matic je jednoduše sčítání a odečítání jednotlivých prvků matic podle pravidla:

$$\text{pokud } \mathbf{A} \pm \mathbf{B} = \mathbf{C}, \text{ potom } a_{ij} \pm b_{ij} = c_{ij}. \quad (3.7)$$

Potíž spočívá v otázce, co dělat s neznámými prvky matice. Pokud jsou nulové, výsledky mohou být jako na obr. 3.7. Dříve než se provede aritmetická operace, jedna nebo obě matice se doplní na stejné rozměry přičtením nulových prvků v chybějících řádcích a sloupcích. Případy aritmetických operací v blocích jsou známy jako přímý součet nebo rozdíl matic. Pokud neznámé prvky matice nejsou nulové, operace vedou k chybám.

Zásadně stejné podmínky platí pro násobení matic. Vysvětlili jsme účinek permutačních matic a skalární součiny vektorů. Pokud násobíme matici vektorem sloupcem zprava, prvky řádků \mathbf{v} matice násobí všechny prvky sloupce. Pokud prvky \mathbf{v} jsou menší než 1, zmenšují všechny prvky tohoto sloupce, pokud prvky \mathbf{v} jsou větší než 1, zvětšují je. Dva simultánní procesy se vyskytují při násobení: prvky řádků matice se váží a sčítají, nebo pokud prvky vektoru jsou záporné, odečítají se. Násobení zleva má transponovaný účinek. Násobení matice vektorem transformuje matici na vektor. Obvykle se to definuje jinak, matice transformuje vektor \mathbf{v} jiný.

Simultánní násobení matice vektorem řádkou zleva a vektorem sloupcem zprava transformuje matici do jednoho prvku. Pokud oba vektory jsou jednotkové vektory \mathbf{J}^T a \mathbf{J} , jen sečítají prvky matice.

Je užitečné také definovat *přímý součin* dvou matic. Pro jeho odlišení od skalárního součinu, zapisuje se se znakem pro násobení \times :

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}.$$

V přímém součinu se násobí pouze prvky obou matic mající oba indexy identické:

$$c_{ij} = a_{ij}b_{ij}.$$

Je to stejné, jako kdyby obě matice byly nm rozměrné diagonální vektory a našly se složky jejich skalárního součinu:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Podobně se může vysvětlit sčítání matic. Obě matice se rozloží do nm rozměrných diagonálních vektorů naleznou se součty:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

3.7 Normalizace matic

Prodiskutovali jsme problém simultánní akce více vektorů nebo vektorů majících jinou intenzitu než 1. To lze někdy vyřešit normalizací vektorů. Cílem tohoto tvarování vektorů a matic je udělat je srovnatelné. Normalizace vektorů se provádí vlastními vektory, které musí dávat jednotkovou diagonální matici \mathbf{I} . Zavedli jsme jednotkové vektory \mathbf{e}_j . řádkový vektor je srovnatelný s jednotkovým vektorem pokud má stejnou délku. Euklidovská délka je kriteriem, tedy vektor je normalizovaný pokud jeho prvky se dělí odmocninou jeho Euklidovské délky. Například vektor $(2, 1, 1, 0)^T$ se normalizuje jeho dělením s $\sqrt{6}$. Délky jeho skalárního součinu je potom 1. Maticový vektor se normalizuje jeho násobením odmocninou diagonální matice z obou stran. Zde máme dvě možnosti. Buď normalizujeme pouze diagonální prvky nebo všechny řádky a sloupce. Pro normalizaci matice musí být symetriiúcká. Normalizací diagonálních prvků se maticový vektor orientuje ve směru jednotkového vektoru \mathbf{I} . To má některé důsledky na vlastnosti takové normalizované matice.

3.8 Kořeny matic

Definovali jsme skalární součiny a kvadratické formy vektorů a maticových vektorů. Nyní budeme definovat problém odzadu: matice \mathbf{M} má kořeny, pokud může být rozložena do součinu transponovaných matic. Například jednotková diagonální matice má mnoho kořenů:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jednotková diagonální matice tvoří kořen sama sobě, poněvadž nemůžeme odlišit formy

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}^2 = \mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}^T \mathbf{I} = \mathbf{I} \mathbf{I}^T. \quad (3.8)$$

Její kořeny jsou symetrická permutační matice a asymetrické permutační matice. Mimo to existují matice se zápornými znaménky, poněvadž $(-1) \times (-1) = 1$. Naše úsilí nalézt přirozený prostor se poněkud komplikuje tímto faktem, avšak už jsme zavedli komplexní čísla a tak můžeme nalézt kořeny i pro matice posledního příkladu¹. Je současně čtvrtým kořenem \mathbf{I}_3 . Potom existují vlastní vektory všech nesingulárních matic. Naše úsilí vytvořit prostor kontrolovaným způsobem se vymyká kontrole.

¹Kořeny permutačních matic se mohou srovnávat s kvarky ve fyzice: Elementární částice se štěpí do svých složek.

Chapter 4

Rozdělení

4.1 Předběžné poznámky

Rozdělení přirozeného čísla m do n částí zavedl do matematiky Euler. Analytický vzorec pro nalezení počtu rozdělení odvodili Ramanudjan a Hardy [12]. Ramanudjan byl matematický genius z Indie. Byl si jist, že je možné vypočítat počet rozdělení přesně pro jakékoliv číslo m . Nalezl řešení ve spolupráci se svým školitelem, anglickým matematikem Hardym. Je to dosti složitý vzorec odvozený vyšší matematickou technikou. Budeme používat pouze jednoduché rekurzivní metody pro mi vztahy mezi rozdělení.

Steve Weinberg ve své přednášce [13] o důležitosti matematiky pro fyziku se zmínil, že rozdělení získaly důležitost pro teoretickou fyziku, i když Hardy nechtěl studovat praktické problémy. Avšak rozdělením¹ měla důležitost pro fyziku před Hardyho časem i když to Hardy ani Weinberg nevěděli.

Rozdělení štěpí číslo m do n částí, jejichž součet se rovná číslu m , řekněme 7: 3, 2, 1, 1. Rozdělení je uspořádaná množina. Její objekty, *části* jsou napsány v řádce v klesajícím pořádku:

$$m_{j-1} \geq m_j \geq m_{j+1} .$$

Pokud se podíváte na řadu částí, uvidíte, že je to n rozměrný vektor řádka $p = (3, 2, 1, 1)$. Z vektoru rozdělení se získají jiné vektory mající ekvivalentní strukturní prvky, například $r = (1, 2, 1, 3)$, permutováním, jednoduchou záměnou pořadí prvků vektoru. Rozdělení jsou užitečné pro uspořádání bodů rovinných simplexů. Vektor rozdělení lze získat z vektoru-řady jako skalární součin s jednotkovým vektorem-řádkou $\mathbf{J}^T \mathbf{N}$ a uspořádáním vektorů.

Všechny jednotkové permutace vektoru mají stejné délky. Tedy rozdílná rozdělení tvoří základny pro jiné vektory složené ze stejných částí. Vektory patřící stejným rozdělením jsou spojené s jinými body v třírozměrném simplexu

¹Boltzmann používal tento pojem pro rozdělení m kvant energie mezi n částic. Nazval rozdělení komplexiony[2].

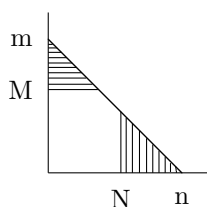
Počet vektorů v rozdělení bude uváděn jako n , velikost prvního vektoru jako m_1 . Závorka (m, n) znamená všechna rozdělení čísla m do nejvýše n částí. Poněvadž napíšeme rozdělení jako n rozměrný vektor povolíme nulové části v rozdělení, aby zaplnily prázdná místa vektoru. Je to jistá inovace proti tradici, která bude velmi užitečná. Avšak je nutné rozlišovat přísně oba druhy rozdělení, s nulami a bez nich.

Ferrersovy grafy se používají v teorii rozdělení pro mnoho důkazů založených jednoduše na jejich vlastnostech. Ferrersovy grafy jsou tabulky (viz obr. 4.1) obsahující m objektů, každý objekt ve svém vlastním boxu. Čtvercové boxy jsou uspořádány do sloupců v nerostoucím uspořádání $m_j \geq m_{j+1}$ se součtem

Pokud rozdělení obsahují stejné části, je možné počítat je společně s použitím indexu k a jejich počet n_k .

Je zřejmé, že Ferrersův graf je matice \mathbf{F} , která má své jednotkové prvky uspořádané postupně v počátečních řádcích a sloupcích. Když se srovnají s naivními maticemi, Ferrersovy grafy vypadají jako stlačené naivní matice \mathbf{N} ve kterých všechny jednotkové prvky byl stlačeny k základní řádce (to je v matici nahoru) odstraněním prázdných prvků:

Figure 4.2: Krácení rozdělení omezením řádků a sloupců



$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{N} & & \mathbf{N}_2 \\
 \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
 \mathbf{F} & &
 \end{array}$$

Zavedením Ferrersových grafů jako matic, dostaneme se nutně k pojmu *omezených rozdělení*. Části rozdělení nemohou být větší než počet řádků matice a počet částí větší než počet jejích sloupců.

Geometrická interpretace omezení v kapitole 2. Část m_{max} určuje stranu krychle, n její rozměr, viz obr.4.2.

Zdokonalená notace rozlišuje dělené číslo M a počet řádků m . Neomezený počet rozdělení $p(M)$ je rovný počtu omezených rozdělení. Když omezující podmínky jsou mírné, potom $m \geq M$ a $n \geq M$:

$$p(M)_{neomezené} = p(M, M, M) . \quad (4.2)$$

Píšeme zde nejprve počet řádků m , potom počet částí n , a naposled součet jednotkových prvků (počet vyplněných boxů) \mathbf{M} .

Důležitá vlastnost omezených rozdělení je určena transponováním Ferrersových grafů $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{F}^T$:

$$p(m, n, M) = p(n, m, M) . \quad (4.3)$$

Rozdělení jsou konjugovaná. Počet rozdělení do přesně n částí s největší částí m je stejný jako počet rozdělení do m částí mající největší část n .

Ferrersův graf lze odečíst od matice obsahující pouze jednotkové prvky (definované jako $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$) a výsledná matice se transverzuje (Tr), například

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{\text{Tr}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Vztah mezi počtem omezených rozdělení dvou rozdílných čísel se získá pomocí rovnice

$$p(m, n, M) = p(n, m, mn - M) \quad (4.4)$$

Tato identita byla odvozená operací velmi užitečnou pro získávání prvků schémat rozdělení (viz příští kapitolu) a omezených rozdělení všech druhů. Omezené rozdělení do přesně n částí, mající m jako největší část, má $(m+na-1)$ jednotek vázaných prvky tvořícími první řádku a sloupec odpovídajícího Ferrersova grafu (obr. 4.1). Pouze $(M-m-n+1)$ prvků je volných pro rozdělení v omezeném rámečku $(m-1)$ a $(n-1)$. Tedy

$$p(m, n, M) = p(m-1, n-1, M-m-n+1) \quad (4.5)$$

Například: $p(4,3,8) = p(3,2,2) = 2$. Odpovídající rozdělení jsou 4,3,1 a 4,2,2; nebo 2,0 a 1,1. Tento vzorec se může používat pro nalezení všech omezených rozdělení. Je to dosti snadné, když rozdíl $(M-m-n+1)$ je menší než omezující hodnoty m a n nebo alespoň jedna z omezujících hodnot. řádkové a sloupcové součty částečně omezených rozdělení majících jinou omezující konstantu, kde buď n nebo m mohou být 1 až M jsou:

$$p(m, *, M) = \sum_{j=1}^M p(m, j, M) \quad (4.6)$$

$$p(*, n, M) = \sum_{i=1}^M p(i, n, M) \quad (4.7)$$

Dříve než prozkoumáme omezená rozdělení podrobněji, zavedeme tabulky neomezených a částečně omezených rozdělení.

4.3 Matice rozdělení

částečně omezená rozdělení se mohou získat z neomezených rozdělení odečtením řádky n jednotek nebo sloupce m jednotek. To nám dá rekurzivní vzorec pro počet rozdělení jako součet dvou rozdělení

$$p(*, N, M) = p(*, N-1, M-1) + p(*, N, M-N-1) \quad (4.8)$$

Všechna rozdělení do přesně N částí se dělí do dvou množin. V jedné množině jsou rozdělení mající v posledním sloupci 1, jejich počet se počítá členem $p(*, N-1, M-1)$, což je počet rozdělení čísla $(M-1)$ do přesně $(N-1)$ částí k , které se přidala 1 na n -tém místě a v jiné množině jsou rozdělení, která

Table 4.1: Rozdělení do přesně n částí

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| m=0 | 1 | | | | | | | 1 |
| 1 | | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 3 | | 1 | 1 | 1 | | | | 3 |
| 4 | | 1 | 2 | 1 | 1 | | | 5 |
| 5 | | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | | 7 |
| 6 | | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | 11 |

mají v posledním sloupci 2 a více. Ty se získaly přičtením jednotkové řádky \mathbf{J}^T s n jednotkovými prvky rozdělení $(M - N)$ do N částí.

Podobný vzorec se může odvodit pro rozdělení M do nejvýše N částí. Tato rozdělení mohou mít nulu alespoň v posledním sloupci nebo jsou rozdělené přesně do n částí:

$$p(*, * = N, M) = p(*, * = N - 1, M) + p(*, * = N, M - N) \quad (4.9)$$

člen $p(*, * = N - 1, M)$ jsou rozdělení M do $(N - 1)$ částí transformovaná do rozdělení do N částí přičtením nuly v n -tém sloupci, člen $p(*, * = N, M - N)$ jsou rozdělení $(M - 1)$ do N částí, ke kterým se přidala jednotková řádka.

Abychom formulovali oba rekursivní vzorce přesněji, nejprve se musí definovat zdánlivě paradoxní rozdělení:

$$p(0, 0, 0) = 1 .$$

Co to znamená? Rozdělení nuly do nulového počtu částí. Toto rozdělení představuje prázdný prostor s nulovým rozměrem. Toto rozdělení je oprávněno svou limitou. S použitím naší vytvořující funkce napíšeme $n = 0^0$ a nalezneme limitu:

$$\lim 0^0 = \lim_{x \rightarrow \infty} (1/x)^0 = 1/x^0 = 1 . \quad (4.10)$$

Dostaneme dvě následující tabulky rozdělení

Tabulka 4.2 se získá z tabulky 4.1 jako částečné součty jejích řádek, což znamená násobením jednotkovou trojúhelníkovou maticí \mathbf{T}^T zprava. Prvky matice \mathbf{T}^T jsou

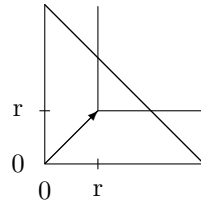
$$h_{ij} = 1 \text{ if } j \geq i \quad h_{ij} = 0 \text{ pokud } j < i . \quad (4.11)$$

Na druhé straně se tabulka 4.1 získá z tabulky 4.2 násobením maticí \mathbf{T}^{-T} zprava. Inverzní prvky jsou

$$h_{ii}^{-1} = 1 , \quad h_{i,i+1}^{-1} = -1 , \quad h_{ij} = 0 , \text{ jinak} . \quad (4.12)$$

Table 4.2: Rozdělení do nejvýše n částí

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|---|---|---|---|----|----|
| m=0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| 3 | | 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 |
| 4 | | 1 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 |
| 5 | | 1 | 3 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 6 | | 1 | 4 | 7 | 9 | 10 | 11 |

Figure 4.3: Omezování orbit rozdělení. Nejnižší dovolená část r přesouvá rovinný simplex

Všimněte si, že prvky tabulky 4.2 vpravo od diagonály zůstávají konstantní. Rovnají se řádkovým součtům tabulky 4.1. Zvětšující se počet nul nemění počet rozdělení.

Když opět násobíme tabulku 4.1 maticí \mathbf{T}^T , dostaneme rozdělení mající jako nejmenší dovolenou část číslo 2. účinek těchto operátorů si lze představit na 2 rozměrném komplexu, operátory posouvají hranici počítaných orbit (obr. 4.3). Operátor \mathbf{T}^T diferencuje n rozměrné komplexy, posouvaje jejich hranici ke kladným číslům odřezáváje menší čísla. Nula tvoří přirozenou základní hranici.

4.4 Rozdělení se zápornými částmi

Operace s tabulkami rozdělení vedou k myšlence, co by se stalo s rozděleními mimo kladný kónus nezáporných čísel. Tedy dovolme také existenci záporných čísel v rozděleních ².

Pokud počet stejných částí n_k je napsáno jako vektor řádku pod vektorem tvořeným číselnou stupnicí, počet rozdělení je nezávislý na přesouvání číselné

²Záporné části mohou být srovnány ve fyzice s antičásticemi. Poněvadž anihilace uvolňuje energii, neanihiluje ji, energie Vesmíru je nekonečná. Spekulace o existenci antisvětů, tvořených pouze antičásticemi vyvažujícími náš svět, mohou být vyslovené jako pochyba pokud Vesmír spočívá v přirozenému kónusu prostoru.

Table 4.3: Rozdělení jako vektory

| Parametr | r | | | | | | |
|-----------------|----|----|---|---|---|---|---------------|
| Vektor m | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | mp= -5 |
| | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 0 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 10 |
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 15 |
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| Vektor p | 4 | | | | | 1 | |
| | 3 | 1 | | | 1 | | |
| | 3 | | 1 | 1 | | | |
| | 2 | 2 | | 1 | | | |
| | 2 | 1 | 2 | | | | |
| | 1 | 3 | 1 | | | | |
| | 1 | 2 | 2 | | | | |
| | | 5 | | | | | |

stupnice, viz tabulku 4.3. Rozdělení jsou vždy odvozená posouváním dvou vektorů, jeden o 1 polohu nahoru, druhý o 1 polohu dolů. Každé rozdělení odpovídá vektoru. Pokud je napíšeme jako sloupce, potom jejich skalární součin s číselnou stupnicí, tvořící vektor řádku \mathbf{m}^T , dává konstantní součet:

$$\mathbf{m}^T \mathbf{p} = \sum_{k \geq r} m_k n_k = m. \quad (4.13)$$

Zde je notace nekonsistentní, prvky vektoru \mathbf{p} jsou čísla vektorů majících stejné délky a písmeno n s indexem k se pro ně používá. Pro hodnoty číselné stupnice písmeno m se používá s obvyklým indexem k , který jde od nejnižší možné hodnoty části r až nejvyšší možné hodnotě. Index k běží k nekonečnu, avšak všech příliš vysoké hodnoty n_k jsou nuly.

S použitím rozdílných vektorů rozdělení a rozdílných vektorů \mathbf{m} , dostaneme následující příklady:

$$\begin{aligned}
 (4 \times -2) + (1 \times 3) &= -5 \\
 (3 \times -1) + (1 \times 0) + (1 \times 3) &= 0 \\
 (3 \times 0) + (1 \times 2) + (1 \times 3) &= 5 \\
 (2 \times 1) + (1 \times 2) + (2 \times 3) &= 10 \\
 (1 \times 2) + (3 \times 3) + (1 \times 4) &= 15.
 \end{aligned}$$

Parametr r přesouvá tabulku rozdělení, její čelo se otáčí okolo nulového bodu. Pokud r bylo $-\infty$, potom $p(-\infty, 1) = 1$ avšak $p(-\infty, 2)$ by bylo neurčité, protože součet konečného čísla s nekonečným číslem je opět nekonečný. Parametr

Table 4.4: Lichá, sudá a smíšená rozdělení

| n | Počet lichých rozdělení | | | | | | | | | Součty | | | |
|-----|-------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|--------|------|---------|------|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Lichá | Sudá | Smíšená | p(m) |
| m=1 | 1 | | | | | | | | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | | 1 | | | | | | | | 1 | 1 | 0 | 2 |
| 3 | 1 | | 1 | | | | | | | 2 | 0 | 1 | 3 |
| 4 | | 1 | | 1 | | | | | | 2 | 2 | 1 | 5 |
| 5 | 1 | | 1 | | 1 | | | | | 3 | 0 | 4 | 7 |
| 6 | | 2 | | 1 | | 1 | | | | 4 | 3 | 4 | 11 |
| 7 | 1 | | 2 | | 1 | | 1 | | | 5 | 0 | 10 | 15 |
| 8 | | 2 | | 2 | | 1 | | 1 | | 6 | 5 | 11 | 22 |
| 9 | 1 | | 3 | | 2 | | 1 | | 1 | 8 | 0 | 22 | 30 |

r se bude zapisovat rozdělením jako jeho horní index, aby ukázal, že rozdílné základny rozdělení diferencují rovinné simplex.

4.5 Rozdělení s vnitřními omezeními

Rozdělení byla klasifikována podle minimální a maximální možné hodnoty části, avšak lze omezit i vnitřek číselné stupnice, lze předepsat, že některé hodnoty jsou zakázané. Je snadné si uvědomit co to znamená: rovinný simplex má díry, některé orbity se nemohou realizovat a jeho $(n - 1)$ těleso je řidší než normální.

Je snadné nalézt počet rozdělení, ve kterých všechny části jsou sudé. Není možné vytvořit sudé rozdělení z lichého čísla, tedy:

$$p_{\text{sudé}}(2n) = p_{\text{neomezené}}(n) . \quad (4.14)$$

Nesnadnější úloha je nalézt počet rozdělení, ve kterých všechny části jsou liché. Jiná zamítnutá rozdělení obsahují smíšené liché a sudé části. Vztah mezi rozdílnými rozděleními je určen jako

$$p_{\text{neomezené}}(n) = p_{\text{liché}}(n) + p_{\text{sudé}}(n) + p_{\text{smíšené}}(n) . \quad (4.15)$$

Odpovídající seznamy jsou uvedené v tabulce 4.4

Všimněte si, jak řídká se získá matice lichých rozdělení z tabulky 4.1. Její prvky, vyjma prvního v každém sloupci, jsou posunuty dolů na křížení diagonál. Liché číslo musí být dělené do lichého čísla lichých částí a sudé číslo do sudého čísla lichých částí. Tedy matice může být zaplněna pouze z poloviny. Rekurence je daná dvěma možnostmi, jak zvyšovat číslo m . Buď přidáme liché 1 k lichým rozdělením $(m - 1)$ s přesně $(j - 1)$ částmi nebo přidáme $2j$ k lichým číslům rozdělení $(m - 2j)$ s přesně j částmi. Vztah se vyjádří jako

$$o(i, j) = p[(i + j)/2, j] . \quad (4.16)$$

Table 4.5: Rozdělení s nerovnými částmi

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ | Rozdíl ($n_{\text{liché}} - n_{\text{sudé}}$) |
|-----|---|---|---|---|----------|---|
| m=1 | 1 | | | | 1 | 1 |
| 2 | 1 | | | | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 1 | | | 2 | 0 |
| 4 | 1 | 1 | | | 2 | 0 |
| 5 | 1 | 2 | | | 3 | -1 |
| 6 | 1 | 2 | 1 | | 4 | 0 |
| 7 | 1 | 3 | 1 | | 5 | -1 |
| 8 | 1 | 3 | 2 | | 6 | 0 |
| 9 | 1 | 4 | 3 | | 8 | 0 |
| 10 | 1 | 4 | 4 | 1 | 10 | 0 |
| 11 | 1 | 5 | 5 | 1 | 12 | 0 |
| 12 | 1 | 5 | 7 | 2 | 15 | 1 |

Rozdělení se všemi částmi nerovnými jsou důležitá, protože jejich transponované Ferrersovy grafy mají největší část lichou, když počet částí je lichý a sudou, když počet částí je sudý. Například

10
 9,1
 8,2
 7,3 7,2,1
 6,3 6,3,1
 5,4,1
 5,3,2
 4,3,2,1

Rozdělení s nerovnými částmi se mohou zobrazit v tabulkové formě jako je tabulka 4.5. Všimněte si, že rozdíl sudých a lichých sloupců rozdělení je většinou nulový, pouze někdy ± 1 . Důležitost tohoto jevu bude vysvětlena později. Počet rozdělení s nerovnými částmi je totožný s rozděleními, jejichž všechny části jsou liché.

Rozdíly jsou způsobeny Franklinovými bloky s rostoucí minimální částí a rostoucím počtem částí (používá se jejich transponovaná notace), které jsou minimální v jejich části se liší o jednu, tvar odpovídajících Ferrersových grafů je trapézový:

Table 4.6: Rozdělení podle jednotkových částí

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|
| m=0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | |
| 2 | 1 | 0 | 1 | | | | |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 1 | | | |
| 4 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | | |
| 5 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 | |
| 6 | 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | 0 | 1 |

(1)

(11)

1, 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5, 7

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

12, 15

4.6 Diference podle jednotkových částí

Máme uspořádaný omezený rozdělň podle počtu nenulových částí v tabulce 4.1. Je možné klasifikovat rozdělň podle počtu vektorů v rozdělň majících jakoukoliv hodnotu. S použitím hodnoty 1, dostaneme jiný druh difference rozdělň jako v tabulce 4.6.

Prvky tabulky jsou:

$$p_{i0} = p(i) - p(i-1), \quad p_{ij} = p_{i-1,j-1}, \text{ jinak } . \quad (4.17)$$

Tabulka 4.6 se získá z následující tabulky 4.7 řádků neomezených rozdělň jejím násobením maticí \mathbf{T}^{-1} . Nulový sloupec tabulky 4.6 je rozdíl dvou následných neomezených rozdělň podle m . Ke všem rozdělňm $p(m-k)$ se přidaly k . Rozdělň v nulovém sloupci obsahují pouze čísla větší než 1. Tato rozdělň nemohou být tvořeny z nižších rozdělň přičtením jednotek, jsou tedy rozdílem funkce rozdělň podle čísla n_1 . Poněvadž tabulka 4.6 je složená, je to součin dvou matic a její inverzní matice je také složená.

4.7 Eulerova inverze rozdělň

Pokud napíšeme následná rozdělň jako sloupcové nebo řádkové vektory jako v tabulce 4.7, jejíž prvky jsou

Table 4.7: Rozdělení a jejich Eulerova inverze

| | Tabulka rozdělení | | | | | | Eulerova inverze | | | | | |
|-----|-------------------|---|---|---|---|---|------------------|----|----|----|----|---|
| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| i=0 | 1 | | | | | | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | -1 | 1 | | | | |
| 2 | 2 | 1 | 1 | | | | -1 | -1 | 1 | | | |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | 0 | -1 | -1 | 1 | | |
| 4 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 | |
| 5 | 7 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | -1 | -1 | 1 |

$$p_{ij} = p(i - j + 1) , \quad (4.18)$$

najdeme dosti snadno její inverzní matici, která je uvedena v druhé části stejné tabulky.

Nenulové prvky v prvním sloupci Eulerovy inverze (a podobně v dalších sloupcích, které jsou pouze posunuty dolů o jednu řádku) se objevují u indexů, které lze vyjádřit Eulerovou identitou týkající se koeficientů expanze u

$$(1 - t)(1 - t^2)(1 - t^3)\dots = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i [t^{3i^2-i}/2 + t^{3i^2+i}/2] . \quad (4.19)$$

Například poslední řádka rozdělení tabulky ?? se eliminuje jejím násobením Eulerovou inverzí jako:

$$(7 \times 1) + (5 \times -1) + (3 \times -1) + (2 \times 0) + (1 \times 0) + (1 \times 1) = 0.$$

Když $i = 1$, existuje pár indexů při $t = 1, 2$; pro $i = 2$ pár je 5, 7; pro $i = 3$ tento pár je -12, -15 a tak dále. Tato čísla jsou vzdálenosti od základny rozdělení. Inverzní matice se stává řidší jak se $p(m)$ zvyšuje, jak už bylo ukázáno shora u Franklinova rozdělení. Všechny inverzní prvky jsou -1, 0, 1. Nenulové prvky Eulerova polynomiálu se získají jako součty součinu

$$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - t^i) . \quad (4.20)$$

To je ověřené násobením několika členů nekonečného součinu. Pokud násobíme Eulerův polynomiál s jeho inverzní funkcí

$$\prod_i = 1^\infty (1 - t^i)^{-1} , \quad (4.21)$$

dostaneme 1. Z tohoto vztahu plyne, že rozdělení jsou vytvořena inverzí Eulerovy funkce, která je *vytvorující funkcí* rozdělení. Členy t^i se musí považovat za představující nerovné části.

Eulerova funkce má všechny části t^i rozdílné. Zkonstruovali jsme taková rozdělení v tabulce 4.5. Pokud koeficient při t^i se získá jako součin sudého počtu $(1 - t^i)$ členů, potom znaménko je kladné, pokud je to výsledek lichého počtu členů, potom znaménko je záporné. Koeficienty jsou určen rozdílem počtu rozdělení s lichými a sudými počty nerovných částí. Tento rozdíl se může dále vysvětlit podle Franklina s použitím Ferrersových grafů.

Všechny části v $p(n)$ mající alespoň jednu část rovnou 1 se získají z $p(n-1)$. Rozdílem $p(n) - p(n-1)$ je způsobena nějakými členy $p(n-2)$. Musíme přidat ke každému rozdělení $p(n-2)$ 2, vyjma všech rozdělení $p(n-2)$ obsahujících 1. Ta se musí buď odstranit nebo použít v transponované formě s použitím transponovaných Ferrersových grafů, poněvadž jsou potřeba velké části. Jedno rozdělení z konjugovaného páru je nadbytečné. Tato nepoužívaná rozdělení se musí odečíst. Například pro $p(8)$:

$$\begin{array}{lll} 6; & 1^6; & \text{Tvorí: } 8; \quad 62; \\ \underline{51}; & 21^4; & 53; \\ 42; & 2^2 1^2; & 44; \quad 2^4; \\ \underline{33}; & 2^3; & 3^2 2; \\ 41^2; & \underline{31^3}; & 42^2; \\ \underline{321}; & & \end{array}$$

Přebytky (nahore podtržené):

$$p(1) + 5: 51; \quad p(3) + 3: 33; 321; 31$$

se získají odečtením největší části z odpovídajícího rozdělení. Dvě se musí přidat k odečítané části. Dostaneme $p(8-5)$ a $p(8-7)$ jako změny.

4.8 Jiná inverzní funkce rozdělení

Setkali jsme se už s jinými tabulkami rozdělení, které mají inverzi, poněvadž jsou v dolní trojúhelníkové formě. Inverzí tabulky 4.1 je tabulka 4.8.

Inverzí tabulky 4.6 je tabulka 4.9.

Zatím co sloupce tabulky 4.8 jsou nepravidelné a prvky každého sloupce se musí nalézt odděleně, sloupce tabulky 4.9 se opakují, jak jsou pouze posunuty v každém sloupci o jednu řádku dolů, podobně jako jsou posunuty prvky jejich původní matice. Mohou se snadno nalézt násobením matice Eulerovy funkce (tabulka 4.7) maticí \mathbf{T} zleva.

4.9 Orbity rozdělení v m rozměrných krychlích

Omezená rozdělení mají geometrickou interpretaci: Jsou to orbity n rozměrných rovinných komplexů useknutých do krychle se stranou $(m-1)$ jako na obr. 4.3.

Table 4.8: Inverzní matice rozdělení do n částí

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|----|----|----|----|----|---|
| m=1 | 1 | | | | | |
| 2 | -1 | 1 | | | | |
| 3 | 0 | -1 | 1 | | | |
| 4 | 1 | -1 | -1 | 1 | | |
| 5 | 0 | 1 | -1 | -1 | 1 | |
| 6 | 0 | 1 | 0 | -1 | -1 | 1 |

Table 4.9: Inverzní matice jednotkových rozdílů

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|----|----|----|----|---|---|
| m=1 | 1 | | | | | |
| 2 | 0 | 1 | | | | |
| 3 | -1 | 0 | 1 | | | |
| 4 | -1 | -1 | 0 | 1 | | |
| 5 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 | |
| 6 | 0 | -1 | -1 | -1 | 0 | 1 |

Můžeme počítat orbity i v krychli. Je to úmorná úloha, pokud se nepoužijí některé speciální techniky, poněvadž jejich počet závisí na velikosti krychle. Například pro 3 rozměrný prostor dostaneme orbity jako v tabulce 4.10.

Rovnice 4.3 se může použít pro krychle. Ukazuje jejich důležitou vlastnost, jsou symetrické podél hlavní diagonály, jdoucí ze středu koordinát, simplexu n^0 , k nejvzdálenějšímu vrcholu krychle, ve kterém všechny n koordináty jsou $(m-1)$. Diagonálu krychle představují v tabulce 4.10 k indexy. Mimo to krychle je konvexní, tedy

$$M \leq mn/2 \text{ potom } p(m, n, M) \geq p(m, n, M-1) \quad (4.22)$$

pokud

$$M \geq mn/2 \text{ potom } p(m, n, M) \leq p(m, n, M-1) \quad (4.23)$$

Zde vidíme důležitost omezených rozdělů. Z tabulky 4.10 najdeme rekurenci, která je daná faktem, že ve větší krychli je vždy menší krychle přítomná jako její základna. Nové orbity, které jsou na jejích rozšířených stranách se k ní přičítají. Avšak nestačí znát orbity jedné rozšířené strany, protože jiné strany se tvoří těmito orbity. Rozšířená strana n rozměrné krychle je $(n-1)$ rozměrná krychle. Rekurentní vztah pro rozdělení v krychli je tedy

$$p(m, n, M) = p(m-1, n, M) + p(m, n-1, M) \quad (4.24)$$

Table 4.10: Orbity v 3 rozměrných krychlích

| Velikost hrany | 0 | 1 | 2 | 3 |
|----------------|-----|-----|----------|---------------|
| m=0 | 000 | 000 | 000 | 000 |
| 1 | | 100 | 100 | 100 |
| 2 | | 110 | 200; 110 | 210; 110 |
| 3 | | 111 | 210; 111 | 300; 210; 111 |
| 4 | | | 220; 211 | 310; 220; 211 |
| 5 | | | 221 | 320; 311; 221 |
| 6 | | | 222 | 330; 321; 222 |
| 7 | | | | 331; 322 |
| 8 | | | | 332 |
| 9 | | | | 333 |

Tato rekurence bude pečlivěji vysvětlena později.

4.10 Vytvořující funkce rozdělení v krychlích

Vytvořující funkce rozdělení je jednoduše vytvořující funkce nekonečně krychle v Hilbertově prostoru, jehož strany mají rozdílné rozměry:

$$\text{části 1 : } (1 + t_1^1 + t_1^2 + \dots t_1^\infty) \quad (4.25)$$

$$\text{části 2 : } (1 + t_2^1 + t_2^2 + \dots t_2^\infty) \quad (4.26)$$

a tak dále až

$$\text{části } \infty : (1 + \dots t_\infty^1) \quad (4.27)$$

Když se provedou násobení pro všechny části a členy následujících rovinných simplexů se sečtou, dostaneme:

$$1 + t_1^1 + [t_2^1 + t_1^2] + [t_3^1 + \dots] \quad (4.28)$$

Vytvořující funkce omezených rozdělení se získá vynecháním nežádoucích (omezených) částí. Někdy se vytvořující funkce definuje v inverzní formě. Nekonečné mocninové série se nahradí rozdíly $(1 - t_k^{-1})$. To je možné, pokud považujeme t za pouze falešnou proměnnou. Například, vytvořující funkce rozdělení s nerovnými neopakujícími se částmi je dané součinem

$$u(t) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - t_k) \quad (4.29)$$

Síto prostoru rozdělení je pravidelné, pokrývá všechna čísla. Počet rozdělení se získá rekursivními technikami. Avšak je to velmi složitá funkce, pokud se

vyjadřuje jedním uzavřeným vzorcem, jako je Ramanudjan-Hardyho funkce. Rozdělení tvoří kostru prostoru. Bude nás zajímat, jak je síto rozdělení zaplněno do prostoru, ve kterém všechny osy mají jednotkovou stupnici, která obsahuje také vektorové řady.

Chapter 5

Mřížky orbit

5.1 Schémata rozdělení

Mnohorozměrné rovinné simplex jsou složitými objekty, je nutné nalézt nástroje, jak je analyzovat. Nakreslit je je nemožné, jak bylo zmíněno, protože jejich části se vrství v našem 3 rozměrném světě na sebe.

Klasifikovali jsme již orbity v rovinných simplexech podle počtu k nenulových částí. Tento počet ukazuje rozměrnost podsimplexů, jejich vrcholy, hrany, $(k-1)$ rozměrná tělesa. Později jsme zavedli počet jednotkových vektorů jako nástroj diferencující simplex. Nyní uspořádáme rozdělení jako dvourozměrné tabulky. Tyto tabulky se budou nazývat *schémata rozdělení*.

Když analyzujeme 7 rozměrný rovinný simplex s $m = 7$, můžeme vyjít z jeho 3 rozměrných podsimplexů (obr. 5.1). Vidíme, že obsahují body odpovídající rozdělení: 7,0,0; 6,1,0; 5,2,0; 4,3,0; 5,1,1; 4,2,1; 3,3,1; 3,2,2. Body odpovídající rozdělení jsou spojené s jinými body simplexu kružnicí. Ve vyšších rozměrech kružnice se mění ve sféry a to je důvodem, proč nazýváme rozdělení *orbitou*. Jiné

Figure 5.1: Mřížka orbit rozdělení (7, 7)

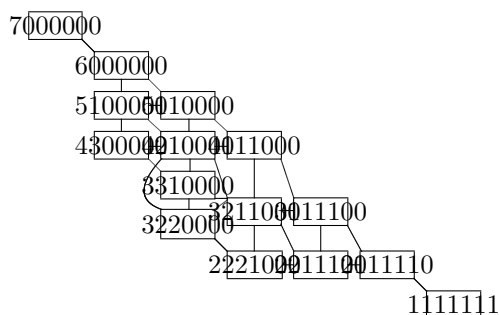


Table 5.1: Schéma rozdělení (7,7)

| na | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Σ |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| m = 7 | 1 | | | | | | | 1 |
| 6 | | 1 | | | | | | 1 |
| 5 | | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 4 | | 1 | 1 | 1 | | | | 3 |
| 3 | | | 2 | 1 | 1 | | | 4 |
| 2 | | | | 1 | 1 | 1 | | 3 |
| 1 | | | | | | | 1 | 1 |
| Σ | 1 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | 11 |

body na každé orbitě mají pouze rozdílné pořadí stejné množiny koordinát.

Když uspořádáme rozdělení do tabulky (tabulka 5.1), klasifikační sloupec volíme podle počtu nenulových částí rozdělení. Jiné klasifikační kritérium je potřeba pro řádky. Budou to délky nejdelšího vektoru m_1 . Ze všech vektorů rozdělení majících stejnou rozměrnost je nejdelší vektor ten, co má nejdelší prvý vektor. Ten je převládá. Avšak mohou existovat delší orbity blíže k povrchu simplexu s menším počtem nenulových částí. Například vektor (4,1,1) má stejnou délku jako (3,3,0), avšak vektor (4,1,1,1,1) je kratší než (3,3,2,0,0). Takové uspořádání je v tabulce 5.1. Orbity s třemi nenulovými částmi leží uvnitř 3 rozměrného simplexu, s dvěma nenulovými částmi leží na jeho hranách. Orbity se čtyřmi nenulovými částmi jsou uvnitř čtyřstěnů, to je na ploše ve čtvrtém rozměru. Existují zde tato rozdělení: 4,1,1,1; 3, 2,1,1; 2,2,2,1. Podobně jsou zaplněny sloupce odpovídající vyšším rozměrům.

Řádky schémat rozdělení klasifikují rozdělení podle délky prvního nejdelšího vektoru \mathbf{e}_1 . Lze snadno ukázat, že všechny vektory ve vyšších řádkách jsou delší než vektory v nižších řádkách v odpovídajícím sloupci. V nejhorsím případě se daný rozdíl

$$(x+1)^2 + (x-1)^2 > (2x)^2. \quad (5.1)$$

Třírozměrný rovinný simplex lze považovat za useknutý 7 rozměrný simplex a po doplnění sloupců tabulky 5.1 odpovídajícími rozděleními dostaneme průřez 7 rozměrnou rovinou. Analýza není dokonalá, jeden prvek je tvořen dvěma orbity, avšak nicméně schéma dává náhled jak takový vícerozměrný prostor vypadá. Budeme tedy podrobně studovat vlastnosti schémat rozdělení.

Počet nenulových vektorů v rozdělení bude uváděn jako n , velikost prvního vektoru jako m . Nuly se nebudou zapisovat, aby se ušetřila práce. Závorka (m, n) znamená všechna rozdělení čísla m do nejvýše n částí. Poněvadž napíšeme rozdělení jako vektor, povolíme jako dříve nulové části k doplnění rozdělení.

Table 5.2: Schéma rozdělení $m = 13$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
|----------|---|---|----|----|----|----|----|---|---|----|----|----|----|
| m=13 | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | 1 | | | | | | | | | | | |
| 11 | | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 10 | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 9 | | 1 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 8 | | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 7 | | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 6 | | | 3 | 5 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | |
| 5 | | | 2 | * | 5 | 5 | 2 | 1 | 1 | | | | |
| 4 | | | | * | 2 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | |
| 3 | | | | | * | * | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | | |
| 2 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| Σ | 1 | 6 | 14 | 18 | 18 | 14 | 11 | 7 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 |

5.2 Konstrukce schémat rozdělení

Schéma rozdělení se rozdělí do čtyř bloků. Diagonální bloky se opakují tabulku 4.1 (levý horní blok), pravý dolní blok je napsán v transponované formě pro $n > m/2$. Lichá a sudá schémata se chovají poněkud odlišně, jak lze vidět na tabulkách 5.2 a 5.3

V levém dolním bloku nenulové prvky označené hvězdičkou * mohou být umístěny pouze nad řádkou, která dává dostatečně velký součin mn pro umístění všech jednotek do odpovídajících Ferrersových grafů a jejich součty musí souhlasit nejen s řádkovými a sloupcovými součty ale také s diagonálními součty, jak ukážeme níže. To lze využít pro výpočty jejich počtu společně s pravidly pro omezená rozdělení.

Příklady ukazují tři důležité vlastnosti schémat rozdělení:

- Schémata rozdělení jsou symetrická podle svých transversál, z příčiny konjugovaných rozdělení získaných transponováním Ferrersových grafů.
- Horní levá čtvrtina (transponovaná dolní pravá čtvrtina) obsahují prvky tabulky 4.1 rozdělení do přesně n částí posunuté o jeden sloupec nahoru.
- Schémata mají formu matice v dolní diagonální formě s jednotkovou diagonálou. Proto mají inverze. Je snadné je nalézt, například pro $n = 7$ (tabulka 5.4).

Rozdělení v rádcích musí být vyvážena jinými s prvky inverzních sloupců. Třetí sloupec zahrnuje nebo vyděluje 331 a 322 s 3211 a 31⁴; 2³1 a 2²1³ s 2 × 21⁵.

Table 5.3: Schéma rozdělení $m = 14$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|----------|---|---|----|----|----|----|----|----|---|----|----|----|----|----|
| m=14 | 1 | | | | | | | | | | | | | |
| 13 | | 1 | | | | | | | | | | | | |
| 12 | | 1 | 1 | | | | | | | | | | | |
| 11 | | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 10 | | 1 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 9 | | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | |
| 8 | | 1 | 3 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | |
| 7 | | 1 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | | | | |
| 6 | | | * | * | * | * | 2 | 1 | 1 | | | | | |
| 5 | | | 2 | * | * | * | 3 | 2 | 1 | 1 | | | | |
| 4 | | | | 3 | * | * | 4 | 3 | 2 | 1 | 1 | | | |
| 3 | | | | | 2 | * | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | | |
| 2 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| 1 | | | | | | | | | | | | | | 1 |
| Σ | 1 | 7 | 16 | 23 | 23 | 20 | 15 | 11 | 7 | 5 | 3 | 2 | 1 | 1 |

Table 5.4: Schéma rozdělení (7,7) a jeho inverze

| na | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|---|---|
| m = 7 | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | |
| 6 | | 1 | | | | | | | 1 | | | | | |
| 5 | | 1 | 1 | | | | | | 0 | 1 | | | | |
| 4 | | 1 | 1 | 1 | | | | | 0 | -1 | 1 | | | |
| 3 | | | 2 | 1 | 1 | | | | 2 | -1 | -1 | 1 | | |
| 2 | | | | 1 | 1 | 1 | | | -2 | 2 | 0 | -1 | 1 | |
| 1 | | | | | | | 1 | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

5.3 Mřížky orbit

Orbita rozdělení je koule, jejíž poloměr r je určen Euklidovskou délkou odpovídajícího vektoru: $r = (\sum p_j^2)^{1/2}$. Poloměry některých orbit rozdělení jsou totožné, například $r(3, 3, 0)^2 = r(4, 1, 1)^2 = (18)$. Je tedy nemožné určit vzdálenosti mezi orbitami s použitím těchto poloměrů (Euklidovských vzdáleností), poněvadž vzdálenost mezi dvěma rozdílnými orbitami nemohou být nulové.

Ukázali jsme v části 4.4, že jedna orbita se může získat z jiné posunutím právě dvou vektorů, jednoho nahoru a druhého dolů, na číselné stupnici. Můžeme si představit, že oba vektory se srazí a vymění si své hodnoty jako si dvě částice ideálního plynu vymění své energie. Pokud omezíme výsledek takové výměny na 1 jednotku, můžeme považovat takové dvě orbity za orbity nejbližšího sousedství. Vzdálenost mezi tímto párem je $\sqrt{2}$. Spojíme je v schématu čarou. Některé orbity jsou tak spojené s mnoha sousedními orbitami, jiné mají právě jednoho souseda, srovnej s obr. 5.1. Orbity (3,3,0) a (4,1,1) nejsou nejbližšími sousedy, protože se musí transformovat v dvou krocích:

$$(3, 3, 0) \leftrightarrow ((3, 2, 1) \leftrightarrow (4, 1, 1))$$

nebo

$$(3, 3, 0) \leftrightarrow (4, 2, 0) \leftrightarrow (4, 1, 1) .$$

Schémat rozdělení nejsou obecně vhodné pro konstrukci mřížky orbit, protože při $m = n > 7$ se objevuje více orbit na některých místech tabulky. Je nutné konstruovat alespoň 3 rozměrném mřížky, aby se ukázala všechna existující spojení. Například:

$$\begin{array}{ccccc} (5, 2, 1) & \leftrightarrow & (4, 3, 1) & \leftrightarrow & (3, 3, 2) \\ & \searrow & \updownarrow & \swarrow & \\ & & (4, 2, 2) & & \end{array}$$

Někdy se dává přísnější podmínka na procesy vedoucí k výměnám, že totiž každá srážka musí měnit počet prázdných částí, jako kdyby to byly informační soubory, které mohou být pouze spojené do jednoho souboru nebo jeden soubor rozdělen do dvou nebo více souborů, nebo jako kdyby byla část souboru převedena do prázdného souboru. Zde je také nejbližší soused omezen na spojení právě dvou souborů nebo na rozdělení souboru do dvou (obr.5.2). V tomto případě cesta mezi dvěma orbitami musí být delší, například:

$$(3, 3, 0) \leftrightarrow (6, 0, 0) \leftrightarrow (4, 2, 0) \leftrightarrow (4, 1, 1)$$

nebo

$$(3, 3, 0) \leftrightarrow (3, 2, 1) \leftrightarrow (5, 1, 0) \leftrightarrow (4, 1, 1) .$$

V mřížce je možné počítat počet nejbližších sousedů. Pokud studujeme počet sousedů o jednu jednotku nebo spojující hrany mezi sloupci schémat rozdělení, dostaneme zajímavou tabulku ??.

Figure 5.2: Mřížka rozdělení souborů. Soubor se může rozdělit do dvou nových nebo dva soubory se mohou spojit do jednoho

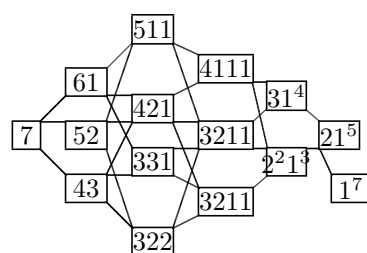
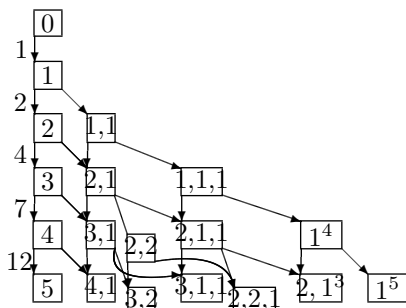


Table 5.5: Pravostranní sousedé o jednu jednotku v orbitách rozdělení

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|--------|---|---|---|---|---|---|----------|
| m=2 | 1 | | | | | | 1 |
| 3 | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 4 | 1 | 2 | 1 | | | | 4 |
| 5 | 1 | 3 | 2 | 1 | | | 7 |
| 6 | 1 | 4 | 4 | 2 | 1 | | 12 |
| 7 | 1 | 5 | 6 | 4 | 2 | 1 | 19 |
| D(7-6) | 0 | 1 | 2 | 2 | 1 | 1 | 7 |

Figure 5.3: Mřížky sousedství mezi rovinnými simplex



Počet pravostranných sousedů je součtem dvou členů. Pravostranní diagonální sousedé existují pro všechna $p(m, n-1)$. Přidáme 1 ke všem těmto rozdělením a snížíme největší část. Neurčení zbývají pravostranní sousedé v řádcích. Jejich počet je rovný počtu rozdělení $p(m-2)$. Ke každému rozdělení $p(m-2, n-1)$ se přičítají dvě jednotky, jedna v n tém sloupci, druhý v $(n-1)$ -tém sloupci.

Počet pravostranných sousedů $P(n)$ je součtem počtu neomezených rozdělení

$$P(n) = \sum_{k=0}^{n-2} p(k) . \quad (5.2)$$

Abychom našli všechny sousedy, musíme přidat sousedy uvnitř sloupců. Počet prvků ve sloupcích je počet rozdělení do přesně n částí $p(m, n)$, rozdíl v každém sloupci se musí snížit o 1, avšak existují další spojení, viz obr. 5.2.

Tato spojení se musí sečítat odděleně. Výsledná čísla jsou už známá. Konstrukce schémat rozdělení dává výsledek, který je znám jako tabulka 4.1 čtená od diagonály do leva.

Jiná interpretace pravostranných sousedů v rozdělení o jednu jednotku je rovinný komplex jako na obr.???. Vektory spojují nejbližší sousedy ve vrstvách.

5.4 Diagonální difference v mřížkách

V mřížkách můžeme počítat orbity na vedlejších diagonálách jdoucích postupně paralelně k hlavní diagonále. Počítají orbity mající tvar $[n-k]^k$. Jejich Ferrersovy grafy mají formu L

$$\begin{array}{cccc} x & x & x & x \\ x & & & \\ x & & & \\ x & & & \end{array}$$

Table 5.6: Diagonální rozdílly rozdělení

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Σ |
|------|----|----|----|----|----|----|----|----|---|----------|
| n= 1 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 2 | 2 | | | | | | | | | 2 |
| 3 | 3 | | | | | | | | | 3 |
| 4 | 4 | 1 | | | | | | | | 5 |
| 5 | 5 | 2 | | | | | | | | 7 |
| 6 | 6 | 3 | 2 | | | | | | | 11 |
| 7 | 7 | 4 | 4 | | | | | | | 15 |
| 8 | 8 | 5 | 6 | 3 | | | | | | 22 |
| 9 | 9 | 6 | 8 | 6 | 1 | | | | | 30 |
| 10 | 10 | 7 | 10 | 9 | 6 | | | | | 42 |
| 11 | 11 | 8 | 12 | 12 | 11 | 2 | | | | 56 |
| 12 | 12 | 9 | 14 | 15 | 16 | 9 | 2 | | | 77 |
| 13 | 13 | 10 | 16 | 18 | 21 | 16 | 7 | | | 101 |
| 14 | 14 | 11 | 18 | 21 | 26 | 23 | 18 | 4 | | 135 |
| 15 | 15 | 12 | 20 | 24 | 31 | 30 | 29 | 12 | 3 | 176 |

Prvky vedlejších diagonál počítají rozdělení, která mají v této vrstvě menší počet jednotek, jiné jsou uvnitř této základny.

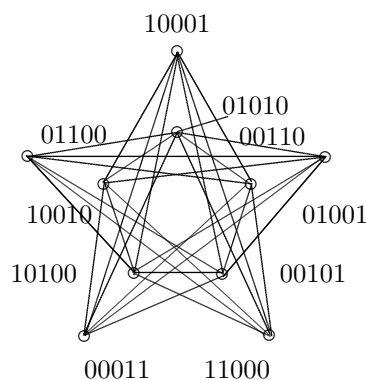
Odpovídající tabulka je 5.5.

Počáteční hodnoty k sloupce mají tyto analytické tvary:

- $1n$ počítá prvky v n sloupcích (řádcích) mající tvar $(n - k)1^k$, $k = 0 - (n - 1)$;
- $1(n-3)$ počítá prvky v $(n - 2)$ sloupcích (řádcích) získané ze základního rozdělení 2,2 přičtením jednotek v první řádce a sloupci;
- $2(n-5)$ počítá prvky v $(n - 2)$ sloupcích (řádcích) získané ze základních rozdělení 3,3 a 2,2,2 přičtením jednotek v první řádce a sloupci;
- $3(n-7)$ počítá prvky v $(n - 2)$ sloupcích (řádcích) získané ze základního rozdělení 4,4; 3,3,2 a 2,2,2,2 přičtením jednotek v první řádce a sloupci;
- $5(n-9) + 1$. Na této úrovni se objevuje rozdělení 3,3,3, kde prvky začínají obsazovat třetí L vrstvu;
- $7(n-11) + 2$.

Hodnoty v závorkách jsou čísla pro rozdělení, které leží uvnitř L rámečku majícího $(2k - 1)$ jednotek. Ve vyšších diagonálních vrstvách se objevují tyto možnosti přidat nové prvky později. Rozdělení 4, 4, 4 a 3, 3, 3, 3, pro $n = 12$, se počítají v sedmé vrstvě. Pro $n = 13$, vrstva počítá sedm rozdělení:

Figure 5.4: Nejbližší sousedé v 00111 mřížce



5, 5, 3;

5, 4, 4;

4, 4, 4, 1;

4, 4, 3, 2;

4, 3, 3, 3;

3, 3, 3, 3, 1;

3, 3, 3, 2, 1.

5.5 Zobecněné mřížky

Pojem mřížky se bude používat také pro možné transformace bodů majících zvláštní vlastnosti mezi nimi samotnými, například mezi všemi 10 permutacemi pětky složené ze 3 symbolů jednoho druhu a 2 symbolů jiného druhu. Když se sousedé liší pouze o jeden výměnu si polohy pouze jakýkoliv pár dvou druhů symbolů, dostaneme mřížku jako na obr. ???. Každý ze tří jednotkových symbolů má dvě možnosti, jak zaměnit 0 za 1. Uspořádejte jako jednoduchý trojúhelník. Současná výměna dvou párů (nebo dvě následné výměny jednoho páru) dávají vzor jako na obr. 5.5, známý jako Petersenův graf.

Mřížky se tvoří vrcholy n rozměrné krychle. Nejbližší vrcholy se liší pouze o jednu koordinátu. Mřížka 3 rozměrné krychle je na obr. 5.6. Porovnej linie grafu s reálnou 3 rozměrnou krychlí a pokuste si představit 4 rozměrnou krychli (obr. 5.7).

Klasickým příkladem vztahové mřížky je Aristotelovo porovnání čtyř vlastností: **teplý**, **chladný**, **suchý**, a **vlhký** ke čtyřem elementům: oheň, vzduch, voda a země. Ty lze uspořádat do tvaru

Figure 5.5: Petersenův graf. Sousedící vrcholy jsou ve vzdálenosti 4

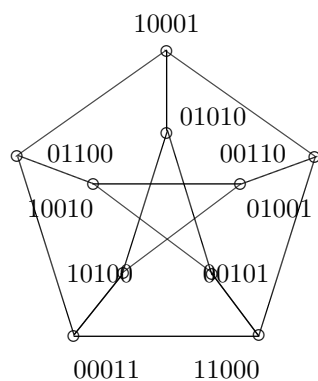
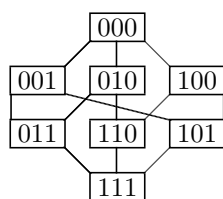
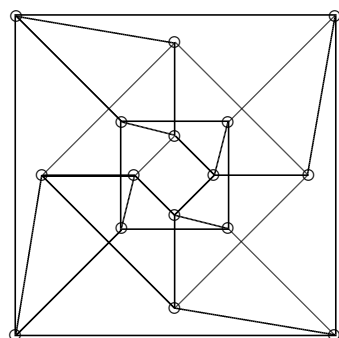


Figure 5.6: Mřížka třírozměrné jednotkové krychle

Figure 5.7: Projekce čtyř rozměrné krychle. Jedna 3 rozměrná krychle je otočena o 45° 

| | | |
|---------------|--------------|----------------|
| <i>vzduch</i> | vlhký | <i>voda</i> |
| teplý | 0 | chladný |
| <i>ohně</i> | suchý | <i>země</i> . |

Prvky mají vždy pouze dvě vlastnosti. Vlastnosti sousedící svisle a vodorovně se vzájemně vylučují. Něco nemůže být současně teplé a chladné, nebo vlhké a suché ¹.

¹Přesněji, je nutné kreslit hranici (nulový bod) mezi těmito vlastnostmi. V závislosti na své saturaci, vodní pára může být suchá stejně jako mokrá.

Chapter 6

Erasthothenesovo síto a jeho Moebiusova inverze

6.1 Dělitelé a jejich matice

V této kapitole zavedeme důležitý pojem *dělitel*. Číslo k je dělitelem čísla m pokud $m \equiv 0 \pmod k$, to znamená, že m je identické s 0, se k . Nebo jinak, $m = kn$, číslo m štěpí do n stejných částí k . Z toho plyne, že každé číslo má alespoň dva dělitele, číslo 1, které nechává číslo nezměněné a číslo samotné, kdy dělení dává 1 jako výsledek. Pokud existují pouze tyto dva dělitele, tak se takové číslo nazývá *prvočíslo*.

Lze nalézt prvočísla p pomocí Erasthothenesova síta. Tento algoritmus pracuje jako síto. Číslo položené na první sloupec síta propadá svým sloupcem. Pokud dosáhne diagonálu bez střetnutí se s dělitelem, je to prvočíslo. Dělitelé j reprezentovaní jednotkami v řádcích dělitelů odpovídajících sloupců pracují jako oka síta. Tedy Erasthothenesovo síto je matice, jejíž prvky jsou

$$e_{ij} = 1 ,$$

pokud číslo j je dělitelem čísla i , a

$$e_{ij} = 0 ,$$

jinak. V tabulce 6.1 je Erasthothenesovo síto a jeho Moebiusova inverzní funkce.

Dělitelé tvoří pravidelný vzor, jsou ve všech řádcích $i \equiv 0 \pmod j$. Prvočísla řídí, jako matice roste, avšak je vždy možné naléznout jiné prvočíslo $p(n)$ jako součin všech předchozích prvočísel zvětšený o 1

$$p(n) = \prod_{j=1}^n p_j + 1 . \quad (6.1)$$

Table 6.1: Erasthotenesovo síto a jeho Moebiusova inverzní funkce

| | Erasthotenesovo síto | | | | | | | Moebiusova inverze | | | | | | |
|-----|----------------------|---|---|---|---|---|---|--------------------|----|----|---|---|---|---|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| i=1 | 1 | | | | | | | 1 | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | -1 | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | 0 | 1 | | | | | -1 | 0 | 1 | | | | |
| 4 | 1 | 1 | 0 | 1 | | | | 0 | -1 | 0 | 1 | | | |
| 5 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | | |
| 6 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | | 1 | -1 | -1 | 0 | 0 | 1 | |
| 7 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Tato rovnice nevytváří všechna prvočísla. Mezi $p(2) = 3$ a $p(3) = 7$ je $p = 5$.

Řádkové součty Erasthotenesova síta (**EJ**) jsou počty dělitelů. Objevují se na diagonále kvadratické formy $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$ matice **E**. Jsou známé jako *Eulerova funkce* $\sigma^0(n)$. Tato funkce je spojena s logaritmy dělitelů. Pokud použijeme jako základnu logaritmu číslo n samotné, dostaneme (vyjma $n = 1$)

$$\sigma^0(n) = 2 \sum \lg(d|n) \quad (6.2)$$

nebo pro jakoukoliv základnu logaritmu;

$$\sigma^0(n) = 2 \sum \lg(d|n) / \lg n \quad (6.3)$$

Dělitelé se objevují v párech, $d_i d_j = n$, vyjma osamělého dělitele, který je odmocninou n . Součet logaritmu se základnou n je tedy pouze polovinou počtu dělitelů čísla n . Součet hodnot dělitelů $\sigma^1(n)$ někdy dává dvojnásobek samotného čísla, jako $2 \times 6 = 6 + 3 + 2 + 1$ nebo $2 \times 28 = 28 + 14 + 7 + 4 + 2 + 1$. Taková čísla jsou známá jako *dokonalá čísla*.

6.2 Moebiusova inverze Erasthotenesova síta

V tabulce 6.1 byla ukázána Moebiusova funkce jako inverzní matice \mathbf{E}^{-1} . Prvky jejího prvního sloupce jsou

- $e_{i1}^{-1} = 1$, pokud $i = 1$, nebo v případě součinu sudého počtu prvočísel;
- $e_{i1}^{-1} = -1$, pokud i je prvočíslo nebo součin lichého počtu prvočísel a
- $e_{i1}^{-1} = 0$, pokud i je součin vyšší mocniny prvočísel jako $4 = 2^2$ v tabulce 6.1.

Tyto prvky se objevují v dalších sloupcích na místech, kde poměr i/j je celé číslo jinak jsou tam nuly. Jednotkové prvky jsou řidší ve vyšších sloupcích.

Moebiusova inverze je klasickým příkladem kombinatorického *principu inkluze a exkluze*. Některé objekty se počítají ve svých kombinacích dvakrát nebo vícekrát, potom se tyto převážené části odečítají v jiných kombinacích, abychom dostali správnou hodnotu. Formulovali jsme tento princip v sofistikované technice součinů matic. Tato technika se může použít pro všechny matice, které mají jednotkovou diagonálu a všechny nenulové prvky pod nebo na diagonále. Jednotková matice \mathbf{I} se odečte od takové matice a rozdíl se potom násobí sám se sebou až všechny nenulové prvky zmizí (nejvýše n krát). Například

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{E} - \mathbf{I}) & (\mathbf{E} - \mathbf{I})^2 & (\mathbf{E} - \mathbf{I})^3 \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Rozvojem součinu $(\mathbf{E} - \mathbf{I})^k$, když se rovná $\mathbf{0}$, jednotková diagonální matice se vyjádří jako

$$\sum_{i=1}^n (-1)^i \binom{n}{k} \mathbf{E}^i = \mathbf{I} \quad (6.4)$$

Násobením obou stran s \mathbf{E}^{-1} a odstraněním $\mathbf{E}^{-1}\mathbf{E} = \mathbf{I}$ dostaneme

$$\mathbf{E}^{-1} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{k} \mathbf{E}^{i-1}. \quad (6.5)$$

Objekty $\binom{n}{k}$ vypadající jako jeden sloupec matice v obou rovnicích jsou známé jako binomiální koeficienty. Počítají všechny možnosti, jak vybrat k objektů z n objektů. Inverzní matice \mathbf{E}^{-1} je součet kladných a záporných násobků kladných mocnin \mathbf{E}^k . To zní zcela tajemně.

6.3 Funkce dělitelů

Počet dělitelů $\sigma^0(n)$ a součet hodnot dělitelů jsou dosti nepravidelné funkce. Jejich sekvence a postupné součty $\sigma^0(n)$ jsou

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|---------------------|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| $\sigma^0(n)$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 4 | 2 | 4 | 3 | 4 | 2 |
| $\sigma^1(n)$ | 1 | 3 | 4 | 7 | 6 | 12 | 8 | 15 | 13 | 16 | 12 |
| $\sum[\sigma^0(n)]$ | 1 | 3 | 5 | 8 | 10 | 14 | 16 | 20 | 23 | 27 | 29 |

Součty $\sum[\sigma^0(n)]$ se získají jako stopy odpovídajících součinů matic rostoucích Erasthothenových sít $\mathbf{E}\mathbf{E}^T$, nebo jednoduše spočítáním prvků matice \mathbf{E} :

Table 6.2: Diagonální hodnoty Erasthothenova síta a jejich Moebiusovy inverze

| | Diagonální hodnoty | | | | | | | Σ | Moebiusova inverze | | | | | | | Σ |
|-----|--------------------|---|---|---|---|---|---|----------|--------------------|----|----|----|----|----|---|----------|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| i=1 | 1 | | | | | | | 1 | 1 | | | | | | | 1 |
| 2 | 2 | 1 | | | | | | 3 | -2 | 1 | | | | | | -1 |
| 3 | 3 | 1 | 1 | | | | | 5 | -1 | -1 | 1 | | | | | -1 |
| 4 | 4 | 2 | 1 | 1 | | | | 8 | 1 | -1 | -1 | 1 | | | | 0 |
| 5 | 5 | 2 | 1 | 1 | 1 | | | 10 | -1 | 0 | 0 | -1 | 1 | | | -1 |
| 6 | 6 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | | 14 | 2 | 0 | -1 | 0 | -1 | 1 | | 1 |
| 7 | 7 | 3 | 2 | 1 | 1 | 1 | 1 | 16 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | -1 | 1 | -1 |

$$\sum [\sigma^0(n)] = \sum_{j=1}^n [n/j] , \quad (6.6)$$

kde $[n/j]$ znamená celou část daného zlomku. Tedy součet $\sum [\sigma^0(n)]$ má jako limitu součin $n \sum_{j=1}^n n/j$. Například

$$\sum [\sigma^0(3)] = 5 < 3(1 + 1/2 + 1/3) = 11/2 .$$

Pokud uspořádáme prvky stop $\mathbf{E}^T \mathbf{E}$ (to je druhá kvadratická forma Erasthothenova síta), nebo postupně spočítáme prvky ve sloupcích matice \mathbf{E} do tabulky a nalezneme její inverzi, potom její řádkové součty dávají hodnoty Moebiusovy funkce (tabulka 6.2).

Prvky řádků předchozí matice \mathbf{M} jsou $\mathbf{J}^T \mathbf{E}$, tedy Moebiusova funkce je $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{J}$.

A ještě důležitější funkcí je součet hodnot dělitelů. Ty lze vyjádřit jako součin matic mající v rámečku $\mathbf{E}(\ast) \mathbf{E}^T$ diagonální matici indexů $\Delta(j)$. $\mathbf{E} \Delta(j)$ je matice hodnot dělitelů. Součty hodnot dělitelů $\sigma^1(n)$ jsou diagonálními prvky matice $\mathbf{E} \Delta(j) \mathbf{E}^T$:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{E} \Delta(j) & \mathbf{E} \Delta(j) \mathbf{E}^T \\ \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 1 & 2 & & \\ 1 & 0 & 3 & \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{array} \right) \end{array}$$

Počet dělitelů j , který také dává podíly n/d se získá jako jiný součin matic:

$$\Delta(j) \mathbf{E} [\Delta(j)]^{-1} \quad (6.7)$$

řádky \mathbf{E} se násobí odpovídajícím indexem i a sloupce se dělí odpovídajícím indexem j . Prvky součinu matic jsou $e_{ij} = i/j$, pokud $i \equiv 0 \pmod j$ a $e_{ij} = 0$ jinak.

Table 6.3: Počty čísel dělených danými děliteli

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| m=1 | 1 | | | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | 2 |
| 3 | 2 | 0 | 1 | | | | | | 3 |
| 4 | 2 | 1 | 0 | 1 | | | | | 4 |
| 5 | 4 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | 5 |
| 6 | 2 | 2 | 1 | 0 | 0 | 1 | | | 6 |
| 7 | 6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | 7 |
| 8 | 4 | 2 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 8 |

Table 6.4: Inverzní funkce počtu čísel

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|-----|----|----|----|----|---|---|---|---|----------|
| m=1 | 1 | | | | | | | | 1 |
| 2 | -1 | 1 | | | | | | | 0 |
| 3 | -2 | 0 | 1 | | | | | | -1 |
| 4 | -1 | -1 | 0 | 1 | | | | | -1 |
| 5 | -4 | 0 | 0 | 0 | 1 | | | | -3 |
| 6 | 2 | -2 | -1 | 0 | 0 | 1 | | | 0 |
| 7 | -6 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | | -5 |
| 8 | -1 | -1 | 0 | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 | -2 |

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 2 & 1 & & & \\ 3 & 0 & 1 & & \\ 4 & 2 & 0 & 1 & \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pokud násobíme tuto matici inverzní maticí \mathbf{E}^{-1} , dostaneme matici, jejíž prvky počítají počty těch čísel mezi 1 a n , která jsou dělena daným dělitelem s výhradou, že už nebyl dělen větším dělitelem. Tedy řádkové součty v tabulce jsou vždy n .

Například 1 v šesté řádce dělí 1 a 5; 2 dělí 2 a 4; 3 a 6 dělí samy sebe, 4 a 5 nejsou dělitelé.

Její inverzní funkce má opět tabulkovou formu (viz tabulku ??).

Musí se najít prvky d_{i1}^{-1} prvního sloupce, poněvadž v dalších sloupcích jsou pouze prvky prvního sloupce zředěné nulami jako v základní matici. Je zřejmé, že prvky $(1-p)$ se musí objevit v řádcích prvočísel, v následujících sloupcích jsou nuly. Hodnoty pro $i = 4, 6$ ukazují, že mocniny prvočísel jsou právě součiny těchto prvků. Hodnota 2 v šesté řádce se interpretuje jako $(-1) \times (-2)$,

součin dvou dělitelů. Pro kontrolu se pokusíme nalézt řešení pro 30, součin tří prvočíselných dělitelů

| Dělitelé | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 10 | 15 | 30 | Σ |
|-----------------------|---|----|----|----|---|----|----|----|----------|
| Dělená čísla d_{i1} | 8 | 8 | 4 | 2 | 4 | 2 | 1 | 1 | 30 |
| d_{i1}^{-1} | 1 | -1 | -2 | -4 | 2 | 4 | 8 | -8 | |
| $d_{i1}d_{i1}^{-1}$ | 8 | -8 | -8 | -8 | 8 | 8 | 8 | -8 | 0 |

kde $d_{30}^{-1} = -8 = -1 \times -2 \times -4$, nebo -4×2 , pokud vyjádříme 30 jako 5×6 .

Jinou funkcí dělení je funkce $\varphi(n)$. Tato funkce počítá čísla, která nejsou dělitelná děliteli n vyjma 1. Jsou to

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|----------------|----|----|------|------|------|------|-----|
| $\varphi(n)$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 4 | 2 | 6 |
| Počítaná čísla | 1; | 1; | 1,2; | 1,3; | 1-4; | 1,5; | 1-6 |

Hodnoty $\varphi(n)$ se objevily jako prvky v prvním sloupci tabulky ???. Ukázali jsme, že $\varphi(n)$ se snadno naleznou jako součin

$$\varphi(n) = n \prod_{p=2}^n (1 - 1/p) \quad (6.8)$$

kde p jsou prvočísla, která jsou děliteli n . Poměr n/p se odštěpí od čísla n každou inverzí prvočísla $1/p$. Součet počítá všechny odečtené části z celého n . Funkce $\varphi(n)$ součinu dvou čísel je jednoduše součin hodnot pro každé číslo

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m) . \quad (6.9)$$

Následující vztah je velmi zajímavý

$$\sum_{n_d|n} \varphi(d) = n . \quad (6.10)$$

Například pro $n = 6$: $\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \varphi(6) = 1 + 1 + 2 + 2 = 6$.

6.4 Vztahy mezi děliteli a rozděleními

Důvodem proč bylo zavedeno Erasthothenovo síto, je jeho využití při počítání rozdělení. V každém neomezeném rovinném simplexu je $p(m)$ rozdělení čísla m . Součet jejich částí je $m \times p(m)$. Tento součin se získá z Erasthothenova síta, pokud se násobí zleva diagonální maticí Δ neomezených rozdělení napsaných v klesajícím pořádku: $p(i) = p(m - i)$ a zprava diagonální maticí Δ indexů i .
Například

$$\begin{pmatrix} 5 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 2 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 2 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 5 \end{pmatrix} \\
= \frac{\begin{pmatrix} 5 & & & & \\ 3 & 6 & & & \\ 2 & 0 & 6 & & \\ 1 & 2 & 0 & 4 & \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}{12 \quad 8 \quad 6 \quad 4 \quad 5}$$

Součet prvků součinu je $35 = 5 \times 7$. Rozdělení $p(5)$ se získalo z hodnoty částí přidaných k nižším simplexům, které se sečetly. Jednotky se počítají v prvním sloupci. Přidaly se k $p(m-1)$ rozdělením. Avšak tato množina obsahuje současně všechny jednotky z nižších rozdělení zvětšené takovým způsobem v předešlých krocích, až na jednotku představující $p(1)$. V druhém sloupci dvě se přidávají ke 3 rozdělením 3. Jedno z nich, $(2,1)$, už obsahovalo jednu 2, když se toto rozdělení získalo z $p(1)$. Podobně se počítají jiná čísla v následujících sloupcích.

Tento součin tří matic se může vložit do rámečku $\mathbf{J}^T(*)\mathbf{J}$, který sečítá prvky orámované matice. Vložka v rámečku je:

$$\mathbf{J}^T \Delta[p(m-i)]\mathbf{E} \times \Delta(i)\mathbf{J} \quad (6.11)$$

Po sobě následující vektory tvoří matice v dolní a horní trojúhelníkové formě a součiny tří matic se nahradí součinem pouze dvou matic:

| | | | | | | | | | |
|----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | 2 | 2 | 2 | 2 |
| | | | | | | | 3 | 3 | 3 |
| | | | | | | | | 4 | 4 |
| | | | | | | | | | 5 |
| 1 | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | | | | 2 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 4 | 1 | 1 | | | 4 | 6 | 9 | 9 | 9 |
| 7 | 3 | 1 | 1 | | 7 | 13 | 16 | 20 | 20 |
| 12 | 4 | 2 | 1 | 1 | 12 | 20 | 26 | 30 | 35 |

Levá matice počítá čísla n_k v rozděleních, pravá matice je váží jako m_k .

Diagonální prvky $mp(m)$ se mohou rozložit v jiné páry vektorů a tak existuje jiný součin dvou matic mající identickou diagonálu. Levá matice je maticí následných rozdělení (tabulka 4.8), pravá matice je maticí součtů dělitelů $\sigma^1(i)$,

napsanou podobně jako matice následných rozdělení, avšak v horní trojúhelníkové formě ve sloupcích

$$\mathbf{S} : s_{ij} = \sigma^1(i) \text{ pokud } i \leq j, s_{ij} = 0, \text{ jinak .} \quad (6.12)$$

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|--|-------|----|----|----|----|
| | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | | 3 | 3 | 3 | 3 |
| | | | | | | | | 4 | 4 | 4 |
| | | | | | | | | | 7 | 7 |
| | | | | | | | | | | 6 |
| | | | | | | <hr/> | | | | |
| 1 | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | | | | | 1 | 4 | 4 | 4 | 4 |
| 2 | 1 | 1 | | | | 2 | 5 | 9 | 9 | 9 |
| 3 | 2 | 1 | 1 | | | 3 | 9 | 13 | 20 | 20 |
| 5 | 3 | 2 | 1 | 1 | | 5 | 14 | 22 | 29 | 35 |

Čísla $mp(m)$ se opět objevují na diagonále součinu. Tyto elementární vztahy se mohou vyjádřit ve formálně abstraktní formě. Napíšeme vytvářející funkci neomezených rozdělení

$$P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} p(m) q^m \quad (6.13)$$

a nalezneme její derivaci

$$dP(x) = \sum_{m=1}^{\infty} mp(m) q^{m-1} . \quad (6.14)$$

Funkce rozdělení $P(x)$ se představuje v řádcích levé matice. Rozdíl $dP(x)$ se objevuje na diagonále součinu. Když najdeme poměr obou matic, výsledek může lze formulovat jako

$$d \lg[P(x)] = dP(x)/P(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(m) q^m . \quad (6.15)$$

Poměr $dP(x)/P(x)$ je rozdíl logaritmu funkce $P(x)$. Součty dělitelů jsou tedy rozdíly logaritmické míry vytvářející funkce rozdělení. To uvádí ve vztah dělitele a funkce rozdělení a využilo se pro nalezení asymptotického chování $p(m)$ funkce.

6.5 Nuly v rozdělení

Pokud je součet hodnot všech částí rovinného simplexu $mp(m)$, můžeme nalézt také počet nul ve všech částech $n_0(m)$. Tyto počty tvoří první sloupec v tabulce, které počítá všechny části klasifikované podle svých hodnot (tabulka 6.2)

Table 6.5: Počet částí v rozděleních

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|----|----|---|---|---|---|---|----------|
| m=0 | 1 | | | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | | | 4 |
| 3 | 3 | 4 | 1 | 1 | | | | 9 |
| 4 | 8 | 7 | 3 | 1 | 1 | | | 20 |
| 5 | 15 | 12 | 4 | 2 | 1 | 1 | | 35 |
| 6 | 31 | 19 | 8 | 4 | 2 | 1 | 1 | 66 |

Maticové prvky tabulky 6.2, vyjma jejího prvního sloupce, se získají jako částečný výsledek součinu matic používaných pro nalezení součtu hodnot částí v rozděleních pomocí rovnice 5.3. Jsou to prvky součinu dvou matic

$\Delta[p(m-i)]\mathbf{E}$ První sloupec je opět maticový součin matice rozdělení do přesně n částí (tabulka 4.2) a matice kladných $(j-i)$ prvků a jednotkového vektoru sloupce \mathbf{J} , který sečítá řádkové hodnoty mezisoučinu. Lze snadno vysvětlit tento vztah: V každém rozdělení, když se m štěpí do přesně n částí, existuje $(m-n)$ nul. Například pro $m=4:8=3\times1+2\times2+1\times1+0\times1$. Počet nul je vyvážen jinými čísly. To vede k jednoduchému tvaru některých prvků inverzní matice

$$m_{i0}^{-1} = (1-i) .$$

Chapter 7

Grupy cyklických permutací

7.1 Pojem cyklických permutací

Předpokládejme, že máme n objektů označených indexem, uspořádaných v přirozeném pořádku, a že zaměníme jejich polohy. Je výhodnou psát tuto operaci *permutace* v dvou řádcích, kde první odpovídá výchozí poloze a druhý udává konečnou polohu. Například:

- Start 0: 1 2 3 4 5 6
- Krok 1: 2 3 1 5 4 6

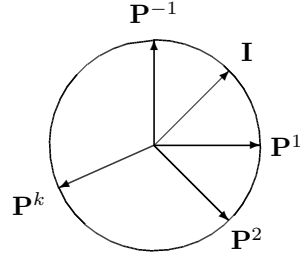
První tři objekty se permutují v *cyklu délky 3*, první objekt se objevil po třetím, příští dva objekty tvoří cyklus délky 2, se vyměnily svá místa, posledního objekt zůstal na svém místě. Opakováním procedury dostaneme permutace 2 až 6:

- Krok 2: 3 1 2 4 5 6
- Krok 3: 1 2 3 5 4 6
- Krok 4: 2 3 1 4 5 6
- Krok 5: 3 1 2 5 4 6
- Krok 6: 1 2 3 4 5 6
- Krok 7: 2 3 1 5 4 6

řada se vrátí v 6 tém kroku do počátečního uspořádání a nový cykl startuje v 7 tém kroku.

Index označující objekty je sloupcový index j . Poloha v permutaci je označena řádkovým indexem i u prvku 1_{ij} . Tedy permutace jsou isomorfní s maticemi. Výchozí poloha, odpovídající diagonále jednotkové matice \mathbf{I} , může být považována za nulové uspořádání. Poslední prvek zůstal ve všech krocích ve své původní

Figure 7.1: Cyklus permutačních matic. Kladné mocniny se mění v záporné



poloze a prvé tři prvky se vrátily do svých poloh dvakrát a dva prvky udělaly tři otočky. Délka celkového cyklu je součinem jednotlivých cyklů: $3 \times 2 \times 1 = 6$. Prvky patřící stejným cyklům se obvykle píšou v závorkách: $(2, 3, 1)(5, 4)(6)$.

Počet prvků n se štěpí do k cyklů, k jde od 1 do n . Cyklická struktura je popsána *orbitami rozdělení*.

Mohli bychom mapovat změny cyklů aditivními operátory \mathbf{S} majícími -1_{ij} pro opouštějící objekt j , 1_{ij} pro objevující se objekt j , nulové řádky pro nehybné objekty ($+1$ a -1 se objevují na stejném místě). Tento operátor byl zaveden v kapitole 3 a podrobněji bude studován v kapitole 12. Nyní budeme studovat *multiplikativní operátory* \mathbf{P} . Jejich matice, *jednotkové permutační matice*, jsou naivní, mají v každé řádce pouze jeden jednotkový prvek a mimo to mají pouze jeden jednotkový prvek v každém sloupci. Matice \mathbf{P} jsou současně notace permutací, poněvadž jejich řádkové jednotkové prvky p_{ij} odpovídají indexům (nebo rovnocenně abecedním symbolům) j .

S použitím multiplikativních operátorů jsou permutace výsledkem násobení řádkových vektorů jednotkovou permutační maticí \mathbf{P} zprava a sloupcových vektorů násobením jednotkovou permutační maticí \mathbf{P} zleva. Různé kroky lze zapsat mocninami těchto matic \mathbf{P}^i . Jednotková diagonální matice je $\mathbf{I} = \mathbf{P}^0$.

Předposlední mocnina jakéhokoliv permutační matice je její inverzí (obr. 7.1). Je dosti snadné naléznout tuto matici, protože je identická s transponovanou maticí \mathbf{P}^T :

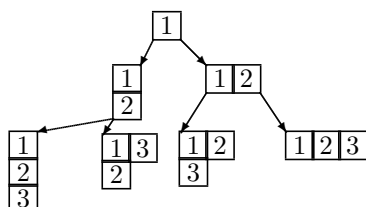
$$\mathbf{P}^{n-1} = \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T. \quad (7.1)$$

Množina všech permutačních matic \mathbf{P} , s n řádky a n sloupci, představuje všechny možné permutace. Zvláštní třídou permutačních matic jsou symetrické matice, pro které platí

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T. \quad (7.2)$$

Takové matice mají všechny jednotkové prvky buď na diagonále, nebo jinak tvoří cykly délky 2. Tyto permutace jsou známé jako *konvoluce*. Ukážeme překvapivě jednoduchou techniku pro jejich vytvoření.

Figure 7.2: Sekvence Youngových tabulek



7.2 Youngovy tabulky

Budeme rekonstruovat pořadí Ferrersových grafů nalezením všech způsobů, jak mohou být tvořeny z nižších grafů přičtením nového prvku. Abychom dostali toto uspořádání, indexuje se každý box přidávaný k menšímu Ferrersovu grafu při jeho rozšiřování do většího Ferrersovu grafu. Rovnocenné boxy budou mít rozdílné indexy, protože je lze dosáhnout rozdílnými kroky. Takto označené Ferrersovy grafy jsou známy jako Youngovy tabulky (obr.7.2).

Youngovy tabulky jsou spojené s permutacemi následujícím algoritmem:

- 1 Pokud větší index vyplývá menším, zapisuje se v příštím volném sloupci Youngovy tabulky.
- 2. Pokud menší index vyplývá větším v permutaci, nahrazuje jej v jeho sloupci Youngovy tabulky a přesouvá to dolů do příští řádky. Například:

$$3412 \rightarrow \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 4 \\ & 3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ & 3 \end{array} .$$

Třetí prvek 1 skáče do prvního sloupce a přesouvá 3 dolů, potom 2 přesouvá 4 dolů. Nebo:

$$4231 \rightarrow \begin{array}{c} 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} 2 \\ 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 2 & 3 \\ 4 & 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 3 \\ & 2 \\ & 4 \end{array} .$$

Jedna vlastnost algoritmu se zdá být nevýhodná, avšak tato vlastnost pouze reprodukuje vztahy mezi permutacemi. To umožňuje, aby se asymetrické permutační matice rozložily rozdílně podle svých řádků a sloupců. Avšak obě Youngovy tabulky náležejí k stejnému typu Ferrersových grafů. Například:

| | | | | | | | Σ |
|---|---|---|---|---|---|---|----------|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 4 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 6 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 5 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 7 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 3 |
| 6 | 3 | 7 | 1 | 4 | 2 | 5 | |

| | | | | | | | |
|---------|---|---|---|-------|---|---|---|
| | 1 | 2 | 5 | | 1 | 3 | 7 |
| Sloupce | 3 | 4 | | řádky | 2 | 5 | |
| | 6 | 7 | | | 4 | 6 | |

Vzpomeňte si, že konvoluce mají symetrické matice, a že potom sloupcové a řádkové čtení je identické. Permutační matice nebo Youngova tabulka je vždy součin dvou permutačních matic nebo Youngových tabulek stejného typu. Ty mohou být identické v případě konvoluce, avšak většinou se liší v řádcích a sloupcích, jako

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | 1 | 0 | 0 |
| | | | 0 | 0 | 1 |
| | | | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$$(a, c, b) \times (b, a, c) = (c, a, b)$$

Objevuje se zde vztah mezi počtem orbit rozdělení $p(n)$ a počtem Youngových tabulek $Y(n)$ a počtem permutačních matic $P(n)$.

Youngovy tabulky se tvoří z Ferrersových grafů rekurzivním algoritmem. Pokud použijeme pro počet Youngových tabulek odpovídajících Ferrersovu grafu s indexem k notaci $y(k)$, potom $y^0(k) = 1$ a máme vztah mezi počtem rozdělení $p(n)$ a počtem Youngových tabulek $Y(n)$. Podobně, pokud umocníme všechna $y(k)$, dostaneme všechny permutace n prvků. Tedy

$$\sum y^0(k) = p(n) ; \sum y(k) = Y(n) ; \sum y^2(k) = P(n) = n! \quad (7.3)$$

Zde $n!$ znamená n faktoriál. Je to součin následujících přirozených čísel:

$$\prod_{k=1}^n k = n! . \quad (7.4)$$

Vysvětlíme tuto funkci později, až budeme hledat jiné vzorce určující počet permutací. Před tím budeme studovat konvoluce. Zde je daný příklad jak rovnice (7.4) pracuje:

Table 7.1: Rozdělení konvolucí

| Na diagonále | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|--------------|----|----|----|----|----|---|---|----------|
| n=0 | 1 | | | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | | | | | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 0 | 1 | | | | 4 |
| 4 | 3 | 0 | 6 | 0 | 1 | | | 10 |
| 5 | 0 | 15 | 0 | 10 | 0 | 1 | | 26 |
| 6 | 15 | 0 | 45 | 0 | 15 | 0 | 1 | 76 |

| Rozdělení: | 5 | 4,1 | 3,2 | 3,1 ² | 2 ² 1 | 2,1 ³ | 1 ⁵ | Σ |
|------------|---|-----|-----|------------------|------------------|------------------|----------------|----------|
| $y^0(k)$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 7 |
| $y^1(k)$ | 1 | 4 | 5 | 6 | 5 | 4 | 1 | 26 |
| $y^2(k)$ | 1 | 16 | 25 | 36 | 25 | 16 | 1 | 120 |

7.3 Počet konvolucí

Počet konvolucí je počet všech možných spojení v telefonní síti. Klasifikujeme všechny konvoluce podle počtu prvků, které zůstávají na svých místech, což znamená nespojené. Je snadné vyplnit následující tabulku

Rekurence prvků tabulky je

$$y_{00} = 1 ; y_{ij} = (i - 1)y_{i-2,j} + y_{i-1,j-1} . \quad (7.5)$$

Inverzní tabulka má stejné prvky, pouze znaménka prvků, jejichž indexy i se liší od indexů j o hodnotu $(4k + 2)$, jsou záporné. Jejich rekurence je

$$y_{00}^{-1} = 1 ; y_{ij}^{-1} = (1 - i)y_{i-2,j} + y_{i-1,j-1} . \quad (7.6)$$

Všechny matice konvolucí se získají dvěma způsoby. Buď přičtením 1 na posledním místě diagonály. Tyto konvoluce se počítají členem $y_{i-1,j-1}$. Nebo se jednotkový prvek přidává v poslední řádce mimo diagonálu. Vloží se mezi existující sloupce do nového sloupce. Potom se jednotkový prvek musí současně přidat v posledním sloupci do nové řádky, $i = j$. Mimo diagonálu existuje $(n - 1)$ míst, kde se možné vytvořit nový spojený pár k j už existujícím párům v matici konvoluce. Tento nový pár obsazuje dvě řádky a sloupce a tedy se tvoří v matici s $(n - 2)$ řádky a sloupci. To nezvyšuje počet prvků na diagonále a tak to zvyšuje počet prvků v stejném sloupci.

Podobná rekurence se použije u řádkových součtů počítajících celkový počet konvolucí

$$Y(n) = (n - 1)Y(n - 2) + Y(n - 1) \quad (7.7)$$

Lze určit prvky tabulky 7.1 přímo, protože se vypočítají podle vzorce

$$y_{ij} = i!/j!t!2^t \quad (7.8)$$

kde $t = (i - j)/2$ je počet cyklů délky 2. Tento vzorec obsahuje 3 faktoriály. Člen 2^t vyrovnává řadu t dělitelů. Všimněte si, že rovnice (7.8) počítá dohromady Youngovy tabulky rozdílných formátů, musí mít pouze stejný počet sloupců. Jestliže jiné vyjádření počtu konvolucí je formální binomiální rovnice

$$Y(n) = (1 + y_i)^n \quad (7.9)$$

kde členy v prvním sloupci tabulky 7.1 y_{k0} se považují za mocniny y^k , když se součty $(1 + y)$ násobí samy se sebou. Například

$$(1 + y)^6 = 1 \times 1 + 6 \times 0 + 15 \times 1 + 20 \times 0 + 15 \times 3 + 6 \times 0 + 1 \times 15 = 76.$$

Konvoluce počítané těmito členy nemají žádné prvky na hlavní diagonále a získají se násobením lichých čísel. Jsou to *liché faktoriály*, poněvadž se získají následným násobením lichých čísel: $1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times 11 \times 13 \times 15 \times \dots$ a tak dále.

7.4 Faktoriály a gamma funkce

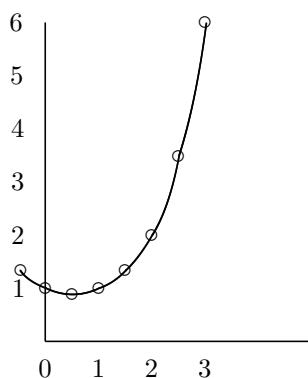
Počet všech permutačních matic $P(n)$ se snadno určí indexováním možností uspořádání jednotek do řádků a sloupců v permutační matici. V první řádce existuje n možností, v druhé řádce je jeden sloupec blokován prvkem první řádky. Prvek druhé řádky nemůže být ve stejném sloupci. Možnosti se snižují pravidelně. V každé řádce je volných $(n - i)$ zbývajících míst. Tyto možnosti jsou nezávislé a tedy se pro všechny řádky násobí. Dostaneme faktoriál

$$P(n) = n \times (n - 1) \times \dots \times 2 \times 1 = \prod_{j=1}^n j = n! \quad (7.10)$$

Faktoriální funkce má zajímavou vlastnost. Pokud p je prvočíslo, potom $(p - 1)! \bmod p = (p - 1)$ a současně $(p - 2)! \bmod p = 1$. Faktoriál je dělitelný všemi svými faktory, řekněme b . Pokud by modulární hodnota byla rozdílná, řekněme a , potom tato hodnota by mohla být vybrána takovým způsobem, že $a + b = p$. Faktoriál by byl dělitelný prvočíslem větším než jeho faktory, což je nemožné. Například: $p = 7$, $720 \bmod 7 \equiv 6$; $120 \bmod 7 \equiv 1$.

Faktoriální funkce je definována pro přirozená čísla, včetně nuly. Doplníme její definici členem $0! = 1$. Už jsme udělali něco podobného při definování prázdných rozdělení.

Kombinatorické funkce jsou definovány pro indexování objektů, které musí být celé. Mohou se objevit otázky, co je objekt, nebo zvíře, nebo člověk, kdy začínají odpovídat svým definicím a kdy jsou poněkud rozdílné. V matematice se takové malé rozdíly mohou vyjádřit čísly. Ve vyšší matematice faktoriální funkce je pouze speciálním případem *gamma funkce*, kterou definoval Euler jako

Figure 7.3: Graf funkce $\Gamma(n)$ 

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (7.11)$$

Když $\Gamma(1) = 1$, potom

$$\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1,$$

$$\Gamma(3) = 2\Gamma(1) = 2,$$

a

$$\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6.$$

Tedy

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Když kreslíme graf gamma funkce, můžeme ji interpolovat pro jakéhokoliv reálné číslo. Gamma funkce je definována integrálem¹.

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty x^z e^{-x} dx. \quad (7.12)$$

Nebudeme se potýkat s problémy spojenými s vyhodnocením takových integrálů a zavedeme funkci Γ v příští kapitole. Nyní přijmeme pouze výsledek udávající pro

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}. \quad (7.13)$$

Z ní se vypočítají snadno jiné $n/2$ hodnoty gamma funkce, které padnou výborně do řady mezi faktoriály, aby se vykreslila jedna hladká funkce (obr. 7.3).

¹e v integrálu je základnou přirozených logaritmů. Logaritmy mohou být dekadické $\lg a$, binární a , přirozené $\ln a$, nebo s jakoukoliv základnou b $\log_b a$

Když interpolujeme gamma funkci do záporných hodnot:

$$\Gamma(1) = 0\Gamma(0)$$

dostaneme

$$\Gamma(0) = \Gamma(1)/0 = \infty$$

$$\Gamma(0) = (-1)\Gamma(-1)$$

$$\Gamma(-1) = \Gamma(0)/(-1) = -\infty .$$

Gamma funkce osciluje pro následná záporná čísla od $+\infty$ do $-\infty$. Funkční vztah už není stálý, ale chová se jako moře v bouři. Svět matematických funkcí není symetrický k znaménku inverze, podobně jako náš fyzikální svět, kde antičástice jsou řídké jevy, které ihned anihilují.

Eulerova gamma funkce se může použít pro nalezení aproximace faktoriální funkce pro velká n . Stirlingova aproximace je

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} . \quad (7.14)$$

7.5 Index cyklických permutací

Po tomto odbočení se nyní vrátíme k permutacím nalezením vzorců určujících počet všech cyklických struktur. Cyklické struktury tvoří orbitu permutací a součet přes všechny orbity dává faktoriál. Orbita rozdělení počítá všechny permutace cyklu s_k délky k . Pokud existuje více cyklů stejné délky, jejich délky s_k se násobí. To dává členy $s_k^t k$, kde t_k je počet cyklů s_k . Různé cykly stejné délky se permutují vzájemně mezi sebou, když se jejich prvky zaměňují. Tato záměny se počítají částečnými faktoriály $t_k!$. Index cyklických permutací je

$$n! / \prod n_k! s_k^{t_k} k . \quad (7.15)$$

Například pro $n = 4$:

| Orbita | Cyklický index | Hodnota | |
|----------|----------------|---------|---|
| 4 | $4!/1!^4$ | 6 | Jeden cykl délky 4 |
| 31 | $4!/1!^1 3!^1$ | 8 | Jeden cykl délky 3, jeden cykl délky 1 |
| 22 | $4!/2!^2$ | 3 | Dva cykly délky 2 |
| 211 | $4!/1!^1 2!^1$ | 6 | Jeden cyklům délky 2, dva cykly délky 1 |
| 1 | $4!/4!^1$ | 1 | čtyři cykly délky 1 |
| Σ | | 24 | |

Table 7.2: Stirlingova čísla prvního druhu

| t | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|-----|-----|-----|----|----|---|----------|
| n=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 1 | | | | 6 |
| 4 | 6 | 11 | 6 | 1 | | | 24 |
| 5 | 24 | 50 | 35 | 10 | 1 | | 120 |
| 6 | 120 | 274 | 225 | 85 | 15 | 1 | 720 |

7.6 Schémata permutací

Zavedli jsme schémata orbit a nyní máme první možnost je použít pro indexování částečných součtů cyklických indexů. Tyto částečné součty jsou známé jako rozdílné *kombinatorické identity*. Nejprve uspořádáme schémata rozdělení podle počtu cyklů v permutaci a délky nejdelšího cyklu k . Například pro $n = 6$ dostaneme

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|-----|-----|-----|----|----|---|
| $k = 6$ | 120 | | | | | |
| 5 | | 144 | | | | |
| 4 | | 90 | 90 | | | |
| 3 | | 40 | 120 | 40 | | |
| 2 | | | 15 | 45 | 15 | |
| 1 | | | | | | 1 |
| Σ | 120 | 274 | 225 | 85 | 15 | 1 |

Řádkové součty následných schémat dávají tabulku 7.2. Její prvky jsou známé jako *Stirlingova čísla prvního druhu*. Jejich jméno naznačuje, že existuje více druhů Stirlingových čísel. Existují v různých vztazích, jak uvidíme později.

Rekurence Stirlingových čísel je

$$s_{ij} = (n-1)s_{i-1,j} + s_{i-1,j-1}. \quad (7.16)$$

Vzorec byl vysvětlen popisem, jak permutační matice \mathbf{P}_{n-1} se zvětšují novými řádky a sloupci. Máme $(n-1)$ mimodiagonálních poloh v poslední řádce, které štěpí $(n-1)$ rozměrnou permutační matici a prodlužují nějaký existující cykl, avšak nemění jejich počet. Potom jednotkový prvek lze přidat na diagonále, avšak tato operace zvyšuje počet cyklů jednotkové délky. Tímto způsobem dostaneme mezisoučty více cyklických indexů přímo beze změn všech odpovídajících orbit. Vzpomeňte si, že těmto součtům odpovídají vrcholy, hrany, a obecně n rozměrné podsimplexy plošného simplexu. Avšak zde štěpí pouze jednu původní orbitu ve středu rovinného simplexu nebo centrální orbitu v krychli (obr. 7.4).

Figure 7.4: Centrální orbita v 3 rozměrné krychli se stranami 0-2. Čáry spojují body se vzdáleností 2

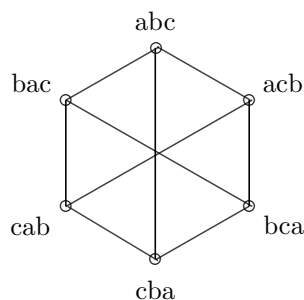


Table 7.3: Počty přemístění

| s | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|-----|-----|-----|----|----|---|---|----------|
| n=0 | 1 | | | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | | | | | 2 |
| 3 | 2 | 3 | 0 | 1 | | | | 6 |
| 4 | 9 | 8 | 6 | 0 | 1 | | | 24 |
| 5 | 44 | 45 | 20 | 10 | 0 | 1 | | 120 |
| 6 | 265 | 264 | 135 | 40 | 15 | 0 | 1 | 720 |

7.7 Počet přemístění

Jinou možností, jak počítat permutace je použít počet jednotkových cyklů. Ten se určí podle jednotkových prvků na hlavní diagonále jednotkové permutační matice známých jako *nehýbné prvky*. Počty rozdělení se mohou získat podle počtu jednotek v rozdělení. S použitím této techniky pro uspořádání do tabulek permutačních indexů, dostaneme sloupcové součty známé jako *počet přemístění*. Jsou ukázané v tabulce ??.

Rekurence je poněkud překvapující; počet přemístění čísel se získá z nulového sloupce jeho násobením binomiálními koeficienty

$$r_{ij} = \binom{i}{j} r_{i-j,0} \quad (7.17)$$

Porovnej to s tabulkou 4.6 rozdělení uspořádaných podle počtu jednotkových částí. Nyní se tyto části jsou jen kombinují s jinými částmi. Prvky tabulky 15.12o rem ist i se získají jako členy poněkud složitého výrazu

$$n! = 1 + (1 - 1/1!)n + (1 - 1/1! + 1/2!)n(n-1) + \dots \quad (7.18)$$

který lze formulovat jako

$$n! = \sum_{k=0}^n (-1/k!)^k (n)_k . \quad (7.19)$$

Například: $4! = 1 + 0 + 1/2 \times 12 + 2/6 \times 24 + 9/24 \times 24$.

Nyní je nutné alespoň vysvětlit, že binomiální koeficient $\binom{i}{j}$ je poměr tří faktoriálů $i!/j!(i-j)!$. Jak se binomiální koeficient získá, uvidíme později. Zde dáme příklad jak 5-tá řádka tabulky 7.3 se získá pomocí rovnice (7.7): $1 \times 44 + 5 \times 9 + 10 \times 2 + 10 \times 1 + 5 \times 0 + 1 \times 1 = 120$.

Počty přemístění r_{i0} počítají permutační matice s i řádky a sloupci, které nemají žádné jednotkové prvky na diagonále (žádný nehybný objekt). Tyto matice se kombinují s diagonální jednotkovou maticí \mathbf{I} s $(i-j)$ řádky a sloupci všemi možnými způsoby počítanými binomiálním koeficientem.

Počty přemístění r_{i0} jsou známé také jako *subfaktoriály*, poněvadž dávají faktoriály podle následující rovnice, jejíž členy byly určeny podle 7.7. Nyní jsou vloženy jako formální mocniny subfaktoriálů $r^i = r_i$:

$$n! = (r_i + 1)^n \quad (7.20)$$

Je možné formulovat rovnici (7.7) také v maticové formě jako přímý součin

$$\Delta(n!) = \mathbf{R} \times \mathbf{B}, \quad (7.21)$$

kde \mathbf{R} je matice subfaktoriálů v řádcích a \mathbf{B} je maticí binomiálních koeficientů. Invertováním formálních mocnin dostaneme $r(n)_0 = (k!^n - 1)$. Vložením $(k!)^n = n!$ dostaneme vzorec

$$n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \dots \pm \binom{n}{n}(n-n)! = (k!)^n \quad (7.22)$$

To přejde pro n jdoucích k nekonečnu

$$n![1 - 1 + 1/2! - 1/3! + \dots] \approx n^n/e^n, \quad (7.23)$$

kde e je základna přirozených logaritmů. Tento přibližný vzorec dává hrubou Stirlingovu aproximaci faktoriálů velkých čísel. Srovnej s přesným vzorcem (7.4).

Měli bychom zmínit ještě jinou formální notaci pro subfaktoriály. Je to notace teorie konečných diferencí².

$$r_0(n) = [E - 1]^n 0! = \Delta^n 0!. \quad (7.24)$$

²Bude to vysvětleno v podkapitole 9.4.

Table 7.4: Přiřazená Stirlingova čísla prvního druhu

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | $\Sigma = r$ |
|-----|---|-----|-----|----|--------------|
| i=0 | 1 | | | | 1 |
| 1 | | 0 | | | 0 |
| 2 | | 1 | | | 1 |
| 3 | | 2 | | | 2 |
| 4 | | 6 | 3 | | 9 |
| 5 | | 24 | 20 | | 44 |
| 6 | | 120 | 130 | 15 | 265 |

Zde Δ^n není diagonální matice, ale difference n -tého stupně, nebo n krát se opakující difference základního stavu E .

Setkáme se s počty přemístění opět v kapitole 14.

Existuje ještě jiná rekurence pro subfaktoriály

$$r_{n0} = nr_{n-1,0} + (-1)^n \quad (7.25)$$

například $5 \times 9 - 1 = 44$; $6 \times 44 + 1 = 245$. Když se vrátíme k schématu rozdělení v tabulce 7.3 a překlasifikujeme permutace bez podle počtu cyklů, nebo, když vynecháme z původního schématu (tabulka 7.2) všechny permutace s jednotkovými cykly, dostaneme tabulku 7.4 přiřazených Stirlingových čísel prvního druhu.

Rekurence je

$$a_{i+1,j} = i[a_{ij} + a_{i-1,j-1}] . \quad (7.26)$$

Rekurence je opět oprávněna možnostmi, jak připojit nový prvek k existujícím cyklům. Buď jej můžeme vložit do existujícího cyklu nebo lze vytvořit nový cykl. Je jednodušší to formulovat pro $(i+1)$ matice. V $(i+1)$ rozměrné matici máme i možností mimo diagonálu, jak připojit nový prvek k existujícím cyklům. Nebo můžeme přidat nový dvou rozměrný cykl k maticím s $(i-1)$ řádky se stejným počtem možností.

7.8 Eulerova čísla

Nemáme vyčerpány všechny možnosti jak klasifikovat permutace. Jiná statistika počítá počet *segmentů* permutace, ve které jsou její prvky uspořádány podle svého přirozeného pořádku jako vzestupné indexy. Například permutace (357168942) se štěpí do čtyř segmentů 357/1689/4/2. Rekurence této statistiky, známé jako Eulerova čísla, je:

$$e_{11} = 1 ; e_{ij} = je_{i-1,j} + (i-j+1)e_{i-1,j-1} . \quad (7.27)$$

Table 7.5: Eulerova čísla

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|---|----|-----|-----|----|---|----------|
| i=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 3 | 1 | 4 | 1 | | | | 6 |
| 4 | 1 | 11 | 11 | 1 | | | 24 |
| 5 | 1 | 26 | 66 | 26 | 1 | | 120 |
| 6 | 1 | 57 | 302 | 302 | 57 | 1 | 720 |

Table 7.6: Mac Mahonova čísla

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|-----|---|---|---|----|----|----|----|----|---|---|----|
| n=1 | 1 | | | | | | | | | | |
| 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | |
| 3 | 1 | 2 | 2 | 1 | | | | | | | |
| 4 | 1 | 3 | 5 | 6 | 5 | 3 | 1 | | | | |
| 5 | 1 | 4 | 9 | 15 | 20 | 22 | 20 | 15 | 9 | 4 | 1 |

Pokud dáme i -tý prvek na konec každého segmentu, počet segmentů zůstává nezměněný. Pokud jej dáme na první místo, zvětšujeme počet segmentů. Podobně pokud jej dáme dovnitř existujícího segmentu, ten se potom štěpí do dvou segmentů. Uvnitř segmentů je $(i - j)$ míst. Alternativním výkladem je, že tato statistika počítá prvky permutačních matic, které jsou nad hlavní diagonálou. Zde index j jde od 0 do $(n - 1)$. Odpovídající matice je tabulka 7.8.

Otázka: Jak lze interpretovat inverzní funkce Eulerových čísel?

7.9 Mac Mahonova čísla

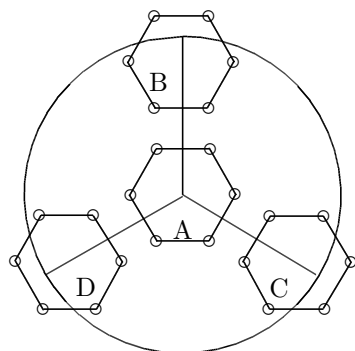
Doposud jsme sečítali permutace jako objekty. Nyní budeme určovat jejich momenty vyjádřené počtem inverzí v permutaci. Počítají se podle počtu nulových prvků nad jednotkovými prvky, které jsou pod hlavní diagonálou jako v příkladě, kde 4 na první místě má 3 inverze a 3 na druhém místě pouze 2

$$\begin{pmatrix} x & x & 1 & 0 \\ x & x & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Permutace klasifikované podle této metody dávají Mac Mahonova čísla jako v tabulce 8.5.

Všimněte si, že zde parametr k nekončí číslem n avšak pokračuje k hodnotě $n(n - 1)/2$. Je to jako kdybychom sečítali tyto hodnoty na diagonále čtverce.

Figure 7.5: 24 permutací řady **abcd**. Jsou rozděleny do čtyř množin začínajícíchmi kapitálkami. Uspořádejte zbývající tři symboly a všechny permutace na kouli



Maximální moment k je součet hodnot $(i - 1)$, kde i jde od 1 až k n

$$\sum_{i=1}^n (i - 1) = \binom{n}{2}. \quad (7.28)$$

Rozdělení momentů je symetrické, tedy prvky matice jsou ve vztahu jako

$$m_{ik} = m_{i, [i(i-1)/2]-k}. \quad (7.29)$$

Rekurence Mac Mahonových čísel m_{ij} je

$$m_{ij} = \sum_{k=0}^n (m - k, n - 1); \quad m_{10} = 1 \quad (7.30)$$

nebo pro $k \leq i$:

$$m_{ij} = m_{i-1,j} + m_{i,j-1}. \quad (7.31)$$

Pokud přidáme k menší permutační matici jednotkový prvek na poslední místo diagonály, nemění se součet přemístění. To dává člen $m_{i-1,j}$. Matice sečtené členem $m_{i,j-1}$ jsou součty prvků předchozích řádek, jejichž momenty jsou zvýšené přičtením nového prvku v odpovídajícím sloupci. Mají požadovaný rozměr. Jejich momenty jsou zvýšené permutací posledního prvku do prvního sloupce.

7.10 Spearmanův korelační koeficient

Součet rozdílů poloh všech objektů permutovaný ve srovnání se základní jednotkovou permutací je vždy 0. Tyto rozdíly mohou být buď kladné nebo záporné. Součet čtverců rozdílů musí být nutně kladný. Tyto rozdíly poloh

mohou být pojednány jako vzdálenosti v krychli (viz obr. 7.4) pro třírozměrný případ obr. 7.5 kde je nakreslen čtyřrozměrný případ).

| | | | | | | |
|-----------------|----|---|---|----|----|----------|
| Referenční bod: | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
| Permutační bod: | 5 | 2 | 4 | 3 | 1 | |
| (2-1) | 4 | 0 | 1 | -1 | -4 | 0 |
| čtverce | 16 | 0 | 1 | 1 | 16 | 34 |

Pokud podělíme získané hodnoty největším možným součtem čtverců, který je 40 pro $n = 5$, dostaneme hodnoty jdoucí od 0 k 1, které charakterizují permutace a jsou známé jako *Spearmanův korelační koeficient*. Používá se pro vyhodnocení pravděpodobnosti získané pořádkové statistiky.

7.11 Redukované grupy cyklických permutací

Doposud jsme pracovali s permutacemi, které se četly pouze z jedné strany. Většina našich symbolů určuje, z které strany se musí číst (s některými výjimkami jako jsou W, A, T, 8 a jiné symetrické symboly). Představte si nyní, že permutace je reprezentovaná řadou barevných korálků jako

(červená)-(modrá)-(bílá)-(zelená)-(žlutá)

Pokud najdeme takovou řadu náhodně, nemůžeme říci, z které strany ji máme číst. Výsledkem je, že nemůžeme odlišit polovinu permutací jako:

$$123 \leftrightarrow 321; 213 \leftrightarrow 312; 132 \leftrightarrow 231 .$$

Jméno takové grupy, která je nerozlišuje čtení z obou stran je *dihedrál*.

Ještě složitější situace vznikne, pokud řada barevných korálků tvoří náhrdelník. Potom nemůžeme nalézt ani směr čtení ani počátek permutace. Tedy máme nerozlišitelné permutace:

$$(123 - 231 - 312) \leftrightarrow (213 - 132 - 321) .$$

Z problémů spojených s těmito redukovanými grupami zmíníme pouze úlohu *zasedacích pořádků*: n sezdáných dvojic by se mělo rozsadit u kulatého stolu takovým způsobem, že žena má sedět mezi 2 muži nikoliv však vedle svého manžela. Pro $n = 4$ existují 2 zasedací pořádky (obr. 7.6).

Počty zasedacích pořádků $M(n)$ jsou:

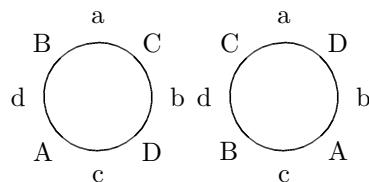
| | | | | | | | |
|------|---|----|---|---|---|----|----|
| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| M(n) | 2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 13 | 80 |

Záporná hodnota u $n = 1$ je nutná pro souhlas s rekurentním vztahem:

$$(n - 2)U_n = n(n - 2)U_{n-1} + nU_{n-2} + 4(-1)^{n+1} . \quad (7.32)$$

Například: $3U_5^6 = 15 \times 2 + 5 \times 1 + 4(-1) = 39$; $U_5^6 = 13$.

Figure 7.6: Problém zasedacích pořádků. Dva zasedací pořádky pro čtyři dvojice



7.12 Grupy symetrie

Doposud jsme předpokládali, že vektory jsou definovány v multidimensionálním prostoru a že počet permutací je určen rozměrností prostoru. Je možné definovat grupy, které jsou pouze isomorfní s nějakou Grupou S_n cyklických permutací. Jako příklad zavedeme grupu 6 matic se 2 řádky a sloupce, která je isomorfní s S_3 :

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{I} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \\
 \mathbf{A} & \mathbf{G} & \mathbf{P} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Pokud násobíme těmito 2 rozměrnými maticemi vektor-řádku zprava (nebo vektor-sloupec zleva) jejich Euklidovská délka zůstává konstantní, nikoliv však součet jejich prvků. Účinek těchto matic lze ukázat na jednotkové kružnici. Operátory \mathbf{I} a \mathbf{A} jsou vzájemně ortogonální, jiné matice otáčejí vektory o $(2/3)\pi$, to je o 120 stupňů, 0.5 je $\cos 60^\circ$, $\sqrt{3}/2 = 0.866 = \sin 60^\circ$.

Místo cyklů rozdílných délek se objevují v třírozměrné geometrii nové prvky symetrie.

Jsou tu *osy otáčení*. Pokud obrázek má k rozměrnou osu otáčení, má k ekvivalentních poloh a vrátí se do své původní polohy po k translacích, které jej otáčejí okolo osy.

Jiným druhem prvků symetrie je *rovina zrcadlení*, která odráží obrázek jako dvojstranné zrcadlo.

Tyto základní prvky symetrie se kombinují rozdílnými způsoby a jejich systémy jsou známé pod rozdílnými jmény.

7.13 Vierer Gruppe

Jedna soustava 4 jednotkových permutačních matic 4×4 je:

$$\begin{array}{cc}
 \mathbf{I} & \mathbf{B} \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{array} \right) \\
 \mathbf{A} & \mathbf{C} \\
 \left(\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{array} \right)
 \end{array}$$

Pokud si představíme, že těmito maticemi permutujeme vrcholy čtverce označené a, b, c, d, potom **I** je identita, která nechává polohy rohů čtverce nezměněné, **A** a **C** odrážejí podle rovin rovnoběžných se stranami čtverce **B** otáčí rohy čtverce okolo středu. Grupa obsahuje všechny možné součiny těchto čtyř matic.

S grupou těchto čtyř matic jsou isomorfní takové grupy matic, které se získají násobením jednotkové permutační matice **P** zleva vhodnou maticí a zprava její inverzní maticí

$$\mathbf{U}\mathbf{P}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{P}_a; \quad \mathbf{U}\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{I}. \quad (7.33)$$

S použitím Hadamardových matic dostaneme jiné grupy čtyř matic

$$\begin{array}{cc}
 \mathbf{I} & \mathbf{B} \\
 \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{array} \right) \\
 \mathbf{A} & \mathbf{C} \\
 \left(\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \\ 1 & & & \end{array} \right)
 \end{array}$$

Všimněte si, že odpovídající matice v obou grupách mají identické stopy, které jsou známé jako *charaktery grupy*.

Chapter 8

Naivní matice v dolní trojúhelníkové formě

8.1 Jiná faktoriální funkce

Dříve než budeme studovat všechny naivní matice \mathbf{N} , budeme pracovat nejprve s naivními maticemi v *dolní trojúhelníkové formě*, které tvoří a podgrupu naivních matic. Zbývající naivní matice se z nich mohou získat permutováním sloupců jednotkovými permutačními maticemi \mathbf{P} zprava. Připomeňte si, že naivní matice \mathbf{N} mají jeden jednotkový prvek v každé řádce. Pokud matice je v dolní trojúhelníkové formě, potom všechny její nenulové prvky musí být na nebo pod hlavní diagonálou. Podobně, pokud matice je v horní trojúhelníkové formě, potom všechny její nenulové prvky musí být na nebo nad hlavní diagonálou. Ze všech permutačních matic \mathbf{P} pouze *matice identity* \mathbf{I} má trojúhelníkový tvar. Avšak ta existuje současně v obou trojúhelníkových tvarech jako všechny diagonální matice.

Existuje pouze jedno místo v první řádce dolní trojúhelníkové formy pro jednotkový prvek, dvě místa jsou v druhé řádce a vždy o jedno místo více v každé následující řádce pro jednotkový prvek. Tato situace je právě opačná ke konstrukci permutační matice. Tam se možnosti umístění jednotkových prvků snižovaly v každé řádce. Nicméně oba přístupy dávají stejný výsledek. Tedy existuje $n!$ naivních matic v dolní trojúhelníkové formě (nebo v případě transponované naivní matice \mathbf{N}^T v horní trojúhelníkové formě). Transponované naivní matice lze mapovat na body s přirozenými koordinátami v m rozměrné krychli.

Pokud ponecháme první sloupec jako falešnou proměnnou (indexovanou jako nulový sloupec) pro střed soustavy koordinát: $\mathbf{e}_{0j} = 1$, naivní matice v dolní trojúhelníkové formě se může srovnávat s členy formálního násobení

$$(1)(1+a)(1+a+b)(1+a+\dots) = \prod_{j=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \mathbf{e}_j \right). \quad (8.1)$$

Všechny transponované matice \mathbf{N} jsou umístěny v m rozměrném pravoúhlém rovnoběžníku, jehož strany jsou $0, 1, 2, 3, \dots, (n-1)$. S těmito maticemi se budou opakovat všechny klasifikace jako u permutačních matic. Matice s m řádky tvoří v těchto paralepídech faktoriální rovinné simplex. Srovnaj je s vytvářejícími funkcemi rozdělení vysvětlenými v podkapitole 4.10, kde počet prvků se také snižoval, avšak z jiných důvodů.

8.2 Klasifikace v klesajícím pořádku

V předcházející kapitole byly zavedeny Youngovy tabulky a porovnány s konvolucemi majícími pouze cykly délky 1 a 2. Youngovy tabulky odpovídají naivním maticím, jejichž částečné sloupcové součty jsou uspořádané vždy v klesajícím pořádku:

$$\sum_{i=1}^k n_{ij} \geq \sum_{i=1}^k n_{i,j+1} . \quad (8.2)$$

Například dvě naivní matice $n = 3$ jsou vyloučeny tímto pravidlem:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) . \end{array}$$

\mathbf{A} je vyloučené poněvadž $b^2 > a$, \mathbf{B} je vyloučené poněvadž $c > b^0$.

8.3 Stirlingova čísla prvního druhu

Tato čísla počítají naivní matice klasifikované podle počtu k prvků na hlavní diagonále

$$s_{nk} = (n-1)s_{n-1,k} + s_{n-1,k-1} . \quad (8.3)$$

Pod diagonálou v n té řádce je $(n-1)$ míst, která lze přidat s k prvky na hlavní diagonále bez změny k . To násobí první člen.

Pokud přidáme 1_{nn} , zvyšujeme počet prvků na hlavní diagonále počítaných druhým členem. Viz tabulku 7.2.

To není všechno, co může být řečeno o Stirlingových číslech prvního druhu. Pokud násobíme Stirlingova čísla prvního druhu přímo mocninami 2^{j-1} dostaneme tabulku, jejíž řádkové součty jsou stejné polovině vyššího faktoriálu $(i+1)!/2$ jako v

Table 8.1: Eulerovy polynomiály $E_n(2)$

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|---|-----|------|------|-----|----|----------|
| n=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 2 | | | | | 3 |
| 3 | 1 | 8 | 4 | | | | 13 |
| 4 | 1 | 22 | 44 | 8 | | | 75 |
| 5 | 1 | 52 | 264 | 208 | 16 | | 541 |
| 6 | 1 | 114 | 1208 | 2416 | 912 | 32 | 4683 |

řádkové součty tabulky 7.1 jsou zajímavé. Generují se přímo formální rovnicí

$$[1 + E(k)]^m = 2E(m) \quad (8.4)$$

kde $E(k)^i = E(i)$ a $E(0) = 1$. Potom

$$2E(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} E(0) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} E(1), \quad (8.5)$$

z toho $E(1) = 1$ a tak dále. Tato čísla se budou objevovat později mnohokrát jako rozdíly úplných rovinných simplexů, avšak zde se objevují jako rozšíření faktoriálních simplexů nebo jako maticový součin Eulerova čísla s diagonální maticí mocnin 2^{j-1} .

8.5 Mac Mahonova čísla

Tato statistika (tabulka 7.6) počítá naivní matice podle jejich momentů (nebo počítáním prázdných míst ve všech řádcích k prvnímu jednotkovému prvku), které se získají násobením naivní matice diagonální maticí s indexy $\Delta(j-1)$. Rekurence se získá z menších matic opakováním členů n krát předposlední řádky tabulky Mac Mahonových čísel se stejnými nebo zvýšenými momenty. Pokud jednotkový prvek v poslední řádce se umístí v prvním sloupci, moment zůstává stejná a zvýší se až na $(n-1)$, pokud se umístí v n -tém sloupci. Z každé matice s $(n-1)$ řádky vznikne n nových matic. Jejich momenty se počítají jako například pro $n = 5$:

Table 8.2: Stirlingova čísla druhého druhu

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|---|----|----|----|----|---|----------|
| n=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 1 | | | | 5 |
| 4 | 1 | 7 | 6 | 1 | | | 15 |
| 5 | 1 | 15 | 25 | 10 | 1 | | 52 |
| 6 | 1 | 31 | 90 | 65 | 15 | 1 | 203 |

| Momenty: | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|--------------------|---|---|---|----|----|----|----|----|---|---|----|
| 4 řádky a sloupce | 1 | 3 | 5 | 6 | 5 | 3 | 1 | | | | |
| člen 6 | | | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| člen 5 | | | | | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | |
| člen 4 | | | | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | | |
| člen 3 | | | | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | | | |
| člen 2 | | | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | | | | |
| člen 1 | | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | | | | | |
| člen 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | |
| Mac Mahonova čísla | 1 | 4 | 9 | 15 | 20 | 22 | 20 | 15 | 9 | 4 | 1 |

Toto schéma dává automaticky faktoriály.

8.6 Stirlingova čísla druhého druhu

Když se podíváme na sekvenci aac , vidíme, že v její matici chybí sloupec b . Vyloučili jsme takové řady jako chybné Youngovy tabulky nebo konvoluce, avšak řady jako abb nebyly také možné, kde b se objevilo dvakrát a a pouze jednou. V těchto dvou případech existuje rozdíl: Pokud nejsou všechny sloupce obsazené postupně, přeskakujeme v prostoru některé polohy. Budeme tedy nyní počítat všechny naivní matice v dolní trojúhelníkové formě s postupně obsazenými sloupci. Jejich rekurence je

$$s_{11} = 1; \quad s_{ij} = js_{i-1,j} + s_{i-1,j-1} \quad (8.6)$$

Je možné umístit nový prvek do j už obsazených sloupců a existuje pouze jedna možnost, jak zvýšit počet obsazených sloupců. Tímto způsobem dostaneme tabulku čísel, která jsou známá jako *Stirlingova čísla druhého druhu* (tabulka 8.2).

Stirlingova čísla druhého druhu jsou inverzí Stirlingových čísel prvního druhu. Podobně Stirlingova čísla prvního druhu jsou inverze Stirlingových čísel druhého druhu. Inverze se získá, když jedna ze dvou matic (Tabulka 7.2 a Tabulka 8.2) se násobí střídajícími se znaménky $(-1)^{i-j}$.

$$\Delta_n S_n = S_n - S_{n-1} = (S_{k+1} + 1)^{n-2} \quad (8.10)$$

kde opět vložíme $S^k = S_k$. Například: $S_6 - S_5 = 1 \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 5 + 4 \times 15 + 1 \times 52 = 151$.

Table 8.3: Diference Stirlingových čísel druhého druhu

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|---|----|----|----|----|---|----------|
| m=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 0 | 1 | | | | | 1 |
| 3 | 0 | 2 | 1 | | | | 3 |
| 4 | 0 | 4 | 5 | 1 | | | 10 |
| 5 | 0 | 8 | 19 | 9 | 1 | | 37 |
| 6 | 0 | 16 | 65 | 55 | 14 | 1 | 151 |

Stirlingova čísla druhého druhu jsou definovány formální vztah

$$\Delta_n^1(m)^n = m^{n-1}[(1 + 1/m)^{n-1} + (1 + 1/m)^{n-2} \dots + (1 - 1/m)^0]. \quad (8.11)$$

Vložení $m = 1$, dostaneme čísla $S(n, 2) : \Delta_m 1^n = 1^n[2^{n-1} + 2^{n-2} \dots + 2^0]$. Jiná čísla jsou odvozená vztahem

$$\Delta^m 1^n = (m + 1)\Delta^{m-1} 1^{n-1} + \Delta^{m-1} 1^{n-1} \quad (8.12)$$

pod podmínkou $\Delta^0 1^0 = 1$.

Rozdíly Stirlingových čísel druhého druhu

$$S(m, n) - S(m - 1, n) = \Delta^{n-1} 2^m \quad (8.13)$$

tvoří tabulku 8.3.

Například: $\Delta^2 2^6 = 8[(3/2)^3 + (3/2)^2 + (3/2)^1 + (3/2)^0] = 65$.

Toto číslo počítá naivní matice v dolní trojúhelníkové formě s 3 obsazenými sloupci a 6 řádky, získané z 15 matic počítaných $S(5, 2)$ přidáním jednotkového prvku do třetího sloupce a 2×25 matic počítaných $S(5, 3)$ zvětšených přičtením nového jednotkového prvku do jednoho ze dvou prvních sloupců. Stirlingova čísla druhého druhu se získají v *belliánech*. Bellian se je dělení množiny do částí známých jako ranky. Například množina $X = a, b, c$ má ranky rank 1 = (a; b; c) rank 2 = (a,bc; b, ac; c, ab) rank 3 = (a, b, c).

8.7 Substirlingy

V analogii se subfaktoriály definovanými v podkapitole 7.6, zavedeme čísla, která budeme nazývat *Substirlingy*. Počítají naivní matice v dolní trojúhelníkové formě s postupně obsazenými sloupci v jiném uspořádání, podle počtu sloupců obsahujících právě jeden nenulový prvek. Ukázali jsme, že takové orbity jsou rozdíly rovinných simplexů, tedy také nyní tyto matice tvoří difference. Jejich matice je v tabulce 8.4 která je doplněna řádkou a sloupcem indexovanými od 0. Například: $s_{40} = 4$ počítá $\mathbf{N} : a^4, a^2b^2, abba, abab$.

Table 8.4: Substirlingy

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|-----|----|----|----|----|---|---|----------|
| n=0 | 1 | | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | | | | 2 |
| 3 | 1 | 3 | 0 | 1 | | | 5 |
| 4 | 4 | 4 | 6 | 0 | 1 | | 15 |
| 5 | 11 | 20 | 10 | 10 | 0 | 1 | 52 |

Nyní se zde opět objevily binomiální koeficienty jako vytvářející faktory. Naivní matice bez jakýchkoliv sloupců obsahujících pouze jeden jednotkový prvek se kombinují s n sloupci s pouze jedním jednotkovým prvkem a výsledek dává prvky matice. Tedy součtům Stirlingových čísel druhého druhu se získají formálním binomem:

$$S_n = (s_{n0} + 1)^n, \text{ kde } s^k = s_{n0}. \quad (8.14)$$

Jiná možnost, jak se získají Stirlingova čísla druhého druhu, je přímé počítání odpovídajících matic uspořádaných podle mocniny a . Například:

$$\begin{array}{c} a \\ ab \qquad \qquad aa \\ abb, abc; \quad aab, aba; \quad aaa \end{array}$$

Dostaneme tabulku, kde naivní matice jsou uspořádány podle řádků obsahujících symbol a . Opět se tyto matice získají násobením nižších matic (bez tohoto symbolu) binomiálními koeficienty ukazující kombinatorické možnosti:

| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|----|----|----|----|---|---|----------|
| m=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 3 | 2 | 2 | 1 | | | | 5 |
| 4 | 5 | 6 | 3 | 1 | | | 15 |
| 5 | 15 | 20 | 12 | 4 | 1 | | 52 |
| 6 | 52 | 75 | 50 | 20 | 5 | 1 | 203 |

Substirlingy jsou zase součty *asociovaných Stirlingových čísel druhého druhu*, která počítají naivní matice v dolní trojúhelníkové formě bez prázdných sloupců mající sloupcové součty alespoň $m_k = 2$. Jejich rekurence je daná vzorcem

$$a_{ij} = ja_{i-1,j} + (i-1)a_{i-2,j-1} \quad (8.15)$$

a jejich hodnoty jsou uvedeny v tabulce 8.5.

Table 8.5: Asociovaná Stirlingova čísla druhého druhu

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | Σ |
|-----|---|---|----|----|----------|
| m=0 | 1 | | | | 1 |
| 1 | 0 | 0 | | | 0 |
| 2 | | 1 | | | 1 |
| 3 | | 1 | | | 1 |
| 4 | | 1 | 3 | | 4 |
| 5 | | 1 | 10 | | 11 |
| 6 | | 1 | 25 | 15 | 41 |

Figure 8.1: Tři statistiky. A je Eulerova, B je Mac Mahonova, C je Stirlingova. Uspořádané řady jsou a, horizontální symbol, vertikální symbol

| | A | B | C |
|---|---|---|---|
| c | $\begin{array}{ c c } \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{ c c } \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{ c c } \hline 2 & 3 \\ \hline \end{array}$ |
| b | $\begin{array}{ c c } \hline 2 & 2 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ |
| a | $\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{ c c } \hline 0 & 1 \\ \hline \end{array}$ | $\begin{array}{ c c } \hline 1 & 2 \\ \hline \end{array}$ |
| | a b | a b | a b |

8.8 Prostor čtyř statistik

Mapovali jsme naivní matice v dolní trojúhelníkové formě na body pravoúhlých n rozměrných rovnoběžníků. Tyto body jsou klasifikovány třemi rozdílnými statistikami Eulerovou, Stirlingovou a Mac Mahonovou, ve 3 směrech. Štěpí prostor za Euklidovským. Tyto statistiky rozdělují body odlišně, jak je ukázáno na obr. 8.1 pro třírozměrný prostor a na schématu pro čtyř rozměrný prostor (tabulka 8.6).

Srovnávali jsme tři statistiky, avšak čtvrtá se zde objevila, na diagonále Stirlingovy a Eulerovy statistiky. Eulerova čísla dělí naivní matice v dolní trojúhelníkové formě podle počtu obsazených sloupců. Stirlingova čísla druhého druhu počítají matice s řádky obsazenými postupně a tyto matice se objevují na průřezu obou statistik. Eulerova statistika štěpí 6 naivních matic v dolní trojúhelníkové formě s jedním jednotkovým prvkem na diagonále do tří skupin, Stirlingova čísla vyhodnocují odlišně naivní matice v dolní trojúhelníkové formě s dvěma jednotkovými prvky na diagonále.

Nevím, co si myslíte o těchto koincidencích. Euklidovský prostor je plný překvapení. Zdá se být živý, pokud se jej pokoušíme analyzovat, nové vrstvy se objevují již na elementárních úrovních. Euklides se mýlil, když řekl králi Ptolemaiovi, že neexistuje žádná jiná cesta do jeho prostoru než jeho axiomy. Různé kombinatorické funkce vedou tímto bludištěm jako Ariadnina nit.

Table 8.6: Schéma čtyř statistik pro \mathbf{N}_4 v dolní trojúhelníkové formě

| | | Stirling I | Mac Mahon |
|-------|--------------------|--|----------------------------|
| | | 6 8 3 6 1 | 1 3 5 6 5 3 1 |
| Euler | 1 11 11 1 | 1 4 7 1 4 6 1 | 1 1 2 5 3 3 4 4 1 |
| | | 6 11 6 1 | \nwarrow Stirling II |

Chapter 9

Kombinatorika přirozených vektorů

9.1 Binomiální koeficient

Binomiální koeficient je speciální případ polynomiálního koeficient. Tato definice je neplatná avšak odpovídá faktům. Dvourozměrný prostor je speciálním případem multidimensionálního prostoru.

Když se binom, řekněme $(a + b)$, násobí sám sebou m krát a členy součinu se seskupí, dostaneme například:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 .$$

První člen 4 u a^3b počítá řady **aaab**, **aaba**, **abaa** a **baaa**, třetí člen 4 u ab^3 počítá řady **abbb**, **babb**, **bbab** a **bbba**. Binomiální koeficient je napsán jako číslo m umístěné nad číslo k v závorkách

$$\binom{m}{k} . \quad (9.1)$$

Binomiální koeficient je součinem tří faktoriálů $m!$, $k!_{-1}$, $(m - k)!_{-1}$. Tedy

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m - k} . \quad (9.2)$$

9.2 Polynomiální koeficient

Rozdělení čísla m do n částí je n rozměrný vektor \mathbf{m} , jehož prvky jsou uspořádané v klesajícím pořádku, $m_j \geq m_{j+1}$. Z tohoto vektoru se mohou generovat všechny jiné vektory na dané orbitě, když se jeho prvky permutují jednotkovou permutační maticí působící na vektor rozdělení zprava. Těmto vektorům odpovídají

skalární součiny naivní matice \mathbf{N} s jednotkovým vektorem řádkou \mathbf{J}^T nebo kvadratická forma $\mathbf{N}^T \mathbf{N}$, protože

$$\mathbf{J}^T \mathbf{N} = \mathbf{J}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N}. \quad (9.3)$$

Existuje $n!$ permutačních matic avšak nikoliv tolik permutovaných vektorů sloupců, když některé prvky vektoru řádky nejsou rozlišitelné. Vektory stejné délky m_k směřují ke kouli a pokud se otáčí, jejich permutace jsou nerozlišitelné. Pokud všechny prvky vektoru jsou stejné, potom žádná permutace nemá jakýkoliv účinek na vektor rozdělení.

Rozdělíme prvky vektoru do dvou skupin, jedné se všemi nulovými prvky, to je n_0 prvky, druhé skupiny se všemi zbývajících $(n - n_0)$ prvky. Počet možných permutací se sníží z faktoriálu $n!$ na binomiální koeficient $\binom{n}{n_0}$, nebo $n! / n_0! (n - n_0)!$.

V příštím kroku vydělíme druhou skupinu vektorů s délkou 1, jejich počet je n_1 . Všechny jiné vektory se sečtou třetím členem $(n - n_0 - n_1)$ a odpovídající permutace binomiálním koeficientem $(n - n_0)! / n_1! (n - n_0 - n_1)!$. Tímto způsobem budeme pokračovat, až všechny možné hodnoty m_k se vyčerpají. Pokud nějaké $n_k = 0$, potom výhodně $0! = 1$ a odpovídající člen je neúčinný. Na konci dostaneme součin binomiálních koeficientů:

$$\left(\frac{n!}{n_0! (n - n_0)!} \right) \left(\frac{(n - n_0)!}{(n - n_0 - n_1)!} \right) \left(\frac{(n - n_0 - n_1)!}{n_2! (n - n_0 - n_1 - n_2)!} \right) \cdots \left(\frac{(n - \sum_{k=0}^{m-1} n_k)!}{n_m! 0!} \right) \quad (9.4)$$

Stejně faktoriály se objevují postupně jako dělenci a dělitelé. Když se vyruší, ze součinu binomiálních koeficientů zbývá *polynomiální koeficient*

$$n! / \prod_{k \geq 0} n_k! \quad (9.5)$$

Budeme jej nazývat *polynomiální koeficient pro n permutace* poněvadž se získá permutováním n sloupců. Později zkonstruujeme jiný polynomiální koeficient pro permutace řádků naivní matice.

Omezili jsme index k dolní limitou 0. Koeficient by se mohl ve skutečnosti používat také pro vektory se zápornými prvky. Počty n_k shodných vektorů jsou vždy kladné, i když samotné vektory jsou záporné. Polynomiálním koeficientem (9.2) počítáme body na orbitách rozdělení kladného kónusu n rozměrného prostoru.

Prosím, všimněte si důležitosti tohoto kroku. Známe vektor \mathbf{m} přesně, avšak nahrazujeme jej odpovídajícím rozdělením. Všechny body na dané orbitě se považují za *ekvivalentní*. Nahrazení vektoru \mathbf{m} rozdělením je logická abstrakce. Můžeme pokračovat dále, rozdělení se srovnává s analytickou funkcí a orbita se popisuje hustotou rozdělení.

9.3 Simplexové součty polynomiálních koeficientů

Nyní je možné použít opět schémata rozdělení a studovat součty polynomiálních koeficientů na všech orbitách rovinných simplexů, to znamená, všech přirozených n rozměrných vektorů s konstantními součty m .

Celkové součty jsou známy v kombinatorice jako rozdělení m nerozlišitelných věcí (objektů) do n přihrádek. Sečtou se binomiální koeficientem

$$\sum_{k \geq 0} n! / \prod n_k! = \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n-1}{n-1} \quad (9.6)$$

Oba binomiální koeficienty jsou ve skutečnosti rozdílné formy jednoho koeficientu. Nejsnadněji se tento binomiální koeficient získá sledováním všech možností m věcí do řádky $(n-1)$ (objekty druhého druhu) představujících dělicí stěny oddílů. Existuje $(m+n-1)$ objektů dvou druhů a výsledkem je jednoduše daný binomiální koeficient. Kdo není uspokojen tímto výkladem, může dokázat (9.3) *úplnou indukcí*.

Testovali jsme vztah u jednoduchých případů a fungoval dobře. Tedy předpokládejme, že platí pro všechny n rozměrné vektory s $(m-1)$ prvky a pro všechny $(n-1)$ rozměrné vektory s m prvky. Použijeme proposici pro počítání bodů se součty m v n rozměrech. Tyto body rozdělíme do dvou odlišných podmnožin. V jedné podmnožině budou všechny body mající jako poslední prvek 0. Všechny jsou jasně v $(n-1)$ rozměrném podprostoru a počítají se binomiálním koeficientem $\binom{m+n-2}{m}$. V druhé podmnožině se počítají vektory majících jako poslední prvek alespoň 1. Ty se získají z rozdělení $(m-1)$ věcí do přesně n částí přičtením 1 k prvnímu prvku. Toto přidání nemění odpovídající počet bodů $\binom{m+n-2}{m-1}$. Výsledek je tvořen součtem 2 binomiálních koeficientů a ověří se výpočtem

$$\begin{aligned} & \left(\frac{(m+n-2)!}{m!(n-2)!} \right) + \left(\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!(n-1)!} \right) = \\ & \left(\frac{(m+n-2)![(n-1)+m]}{m!(n-1)!} \right) = \binom{m+n-1}{m}. \end{aligned} \quad (9.7)$$

Jako bylo řečeno, nebudou nás zajímat vektory se zápornými znaménky, avšak je poučné ukázat výsledky podle dolní limity hodnoty r , která se objevuje jako parametr $(1-r)$ členu n v binomiálních koeficientech. Hodnotu r lze považovat za faktor diferencující simplex

| Dolní limita | -1 | 0 | 1 | 2 |
|---------------|-----------------------|----------------------|--------------------|----------------------|
| Body simplexu | $\binom{m+2n-1}{n-1}$ | $\binom{m+n-1}{n-1}$ | $\binom{m-1}{n-1}$ | $\binom{m-n-1}{n-1}$ |

Binomiální koeficienty $\binom{m+3-1}{m}$ jsou známy jako trojúhelníková čísla. Počítají body 3 rozměrných rovin, což jsou rovnostranné trojúhelníky.

Table 9.1: Van der Mondova identita

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|---|----|-----|-----|----|---|----------|
| m=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 2 | 1 | | | | | 3 |
| 3 | 3 | 6 | 1 | | | | 10 |
| 4 | 4 | 18 | 12 | 1 | | | 35 |
| 5 | 5 | 40 | 60 | 20 | 1 | | 126 |
| 6 | 6 | 75 | 200 | 150 | 30 | 1 | 462 |

9.4 Diference normalizovaných simplexů

Spočítali jsme přímo body rovinných simplexů, nyní použijeme schémata rozdělení a vložíme do nich polynomiální koeficienty, podobně jako jsme to provedli u cyklických indexů v kapitole 7. Omezíme se na případy, kdy $m = n$. Jako příklad dáme schéma pro $m = n = 6$:

| na | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|---|----|-----|-----|----|---|
| m=6 | 6 | | | | | |
| 5 | | 30 | | | | |
| 4 | | 30 | 60 | | | |
| 3 | | 15 | 120 | 60 | | |
| 2 | | | 20 | 90 | 30 | |
| 1 | | | | | | 1 |
| Σ | 6 | 75 | 200 | 150 | 30 | 1 |

V prvním sloupci se počítají vrcholy rovinného simplexu, v druhém sloupci body na 2 rozměrných hranách, v třetím sloupci body jeho 3 rozměrných stran. Pouze poslední bod leží uvnitř 6 rozměrné roviny, všech ostatních 461 bodů leží na jeho hranicích. To je dosti překvapující vlastnost velmi rozměrných prostorů, že obálka jejich normálních rovinných simplexů je tak velká. Avšak nesmíme zapomenout, že obvykle mn potom existuje více bodů uvnitř než na hranici.

Sloupcové součty následných normalizovaných rovinných simplexů lze uspořádat do tabulky 9.1, jejíž řádky jsou známé jako *Van der Mondova identita*.

Prvky v každé řádce lze zapsat jako součiny dvou binomiálních koeficientů, například $75 = (6!/4!2!) \times (5!/4!1!)$. To je speciální případ identity

$$\sum_{i=0}^{m-k} \binom{m}{k+i} \binom{m-k}{i} = \binom{m+k}{m} = \binom{m+n-1}{n-1} \quad (9.8)$$

Součet součinů dvou binomiálních koeficientů lze zapsat jako formální mocniny binomiálu

$$\left(\binom{m}{i} + 1 \right)^n = \binom{m+n}{m} \quad (9.9)$$

Table 9.2: Diference podle jednotkových prvků

| n_1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-------|----|-----|-----|----|----|---|---|----------|
| m=0 | 1 | | | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 2 | 0 | 1 | | | | | 3 |
| 3 | 3 | 6 | 0 | 1 | | | | 10 |
| 4 | 10 | 12 | 12 | 0 | 1 | | | 35 |
| 5 | 25 | 50 | 30 | 20 | 0 | 1 | | 126 |
| 6 | 71 | 150 | 150 | 60 | 30 | 0 | 1 | 462 |

Tento vztah počítá body rovinných simplexů v jednom směru. Jeho speciálním případem je *Waltisova identita* pro $m = n$:

$$\sum_{i=0}^{n/2} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n} \quad (9.10)$$

Interpretujeme ji m, ve které první vektor je zakořeněn a pouze $(n-1)$ jiných vektorů se permutuje. Například:

| Orbity | 4000 | 3100 | 1300 | 2200 | 2110 | 1210 | 1111 | Σ |
|--------|------|------|------|------|------|------|------|----------|
| Body | 1 | 3 | 3 | 3 | 3 | 6 | 1 | 20 |
| Počty | 1 | | 9 | | | 9 | 1 | 20 |

9.5 Diference podle jednotkových prvků

Když uspořádáme schémata rozdělení podle počtu jednotkových vektorů n_1 , dostaneme diferenci rovinného simplexu. Například pro $m = n = 5$:

| n_1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----------|----|----|----|----|---|---|
| m=5 | 5 | | | | | |
| 4 | | 20 | | | | |
| 3 | 20 | | 30 | | | |
| 2 | | 30 | | 20 | | |
| 1 | | | | | | 1 |
| Σ | 25 | 50 | 30 | 20 | 0 | 1 |

Výsledné sloupcové součty polynomiálních koeficientů se zobrazí v tabulkové formě v tabulce 9.5

čísla b_{i0} tvoří vektory bez jednotkových prvků. Ty lze nazvat *podrovinná čísla*, protože generují počet bodů normálního rovinného simplexu násobením binomiálními koeficienty:

$$(b_i + 1)^m = \binom{m + n - 1}{m} \quad (9.11)$$

Existuje $(n-k)$ rozměrných vektorů bez jednotkových prvků avšak s nulovými prvky. Jejich $(n-k)$ prvků se kombinuje s k jednotkovými prvky. Když $m \neq n$, potom tyto vztahy jsou složitější. Odpovídající podrovinná čísla se získají výpočty rozdělení bez jednotkových částí. Počátek tabulky je

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|---|---|----|----|----|----|
| m=0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 3 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 4 | 0 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| 5 | 0 | 1 | 4 | 9 | 16 | 25 | 36 |
| 6 | 0 | 1 | 5 | 13 | 26 | 45 | 71 |

Její hodnoty $b(i, j)$ pro malé m jsou:

- $b(0, n) = 1$;
- $b(1, n) = 0$;
- $b(2, n) = \binom{n}{1}$;
- $b(3, n) = \binom{n}{1}$;
- $b(4, n) = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} = \binom{n+1}{2}$;
- $b(5, n) = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = n^2$;
- $b(6, n) = \binom{n}{1} + 3\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} = (n^3 - n)/2$.

Podrovinná čísla se zde objevují na diagonále. Příklad jejich aplikace pro $m = 4$, $na = 6$:

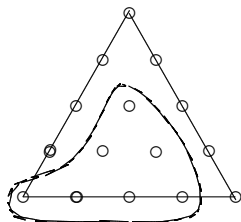
$$21 + 6 \times 5 + 15 \times 4 + 20 \times 0 + 15 \times 1 = 126 = \binom{9}{4}.$$

Vektory bez jednotkových prvků se kombinují s jednotkovými vektory.

9.6 Diference podle jednoho prvku

V schématech rozdělení se počítají body na sférických orbitách. Orientujeme rovinný simplex ve směru jednoho vektoru a potom diferencujeme rovinu podle pouze jednoho zvláštního vektor \mathbf{x} . To lze ukázat na 2 rozměrném komplexu:

Figure 9.1: Diference rovinného simplexu. Je tvořena jedním vrcholem, jednou neúplnou hranou, jednou neúplnou stranou, atd.



| m_a | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Orbita |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---------|
| Body | 0 | * | * | * | * | * | * | 0,m |
| | 1 | | * | * | * | * | * | 1,(m-1) |
| | 2 | | | * | * | * | * | 2,(m-2) |
| | 3 | | | | * | * | * | 3,(m-3) |
| | 4 | | | | | * | * | 4,(m-4) |
| | 5 | | | | | | * | 5,(m-5) |
| Počet | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |

2 rozměrný komplex tvoří 3 rozměrném simplex a jeho body pro rozdílné hodnoty vektoru \mathbf{a} se počítají sloupcovými součty. Je to podobné situaci, když body $(n-1)$ rozměrného komplexu se počítají pro rozdílné hodnoty m , m_k jdou od 0 k m . Body se počítají binomiálními koeficienty $\binom{m+k-2}{k}$. Například pro $n = m = 7$:

| m_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----------------------|-----|-----|-----|-----|----|----|---|---|
| Binomiální koeficient | 792 | 462 | 252 | 123 | 56 | 21 | 6 | 1 |

Dostaneme identitu

$$\sum_{k=0}^m \binom{m+k-2}{k} = \binom{m+n-1}{m} \quad (9.12)$$

Nyní zavedeme jinou diferenci.

9.7 Diference $\Delta(n)$ rovinných simplexů

Doposud se permutovaly nulové prvků s jinými prvky. Vyloučíme nulový prvek a počítáme pouze existující (nenulové) vektory a nikoliv virtuální vektory. To znamená, že počítáme postupně všechny k rozměrné vektory ($k = 1$ až n) s konstantními součty m . Pokud nakreslíme čtyřstěn (obr.??), potom sečítaná množina bodů je tvořena jedním vrcholem, jednou hranou bez druhého vrcholu,

Table 9.3: Matice binomiálních koeficientů \mathbf{B}

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|---|---|----|----|---|---|----------|
| m=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 3 | 1 | 2 | 1 | | | | 4 |
| 4 | 1 | 3 | 3 | 1 | | | 8 |
| 5 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | | 16 |
| 6 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 | 32 |

Table 9.4: Matice $\mathbf{B}\mathbf{B}^T$ binomiálních koeficientů

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-----|---|---|----|----|-----|-----|
| m=0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 2 | 1 | 3 | 6 | 10 | 15 | 21 |
| 3 | 1 | 4 | 10 | 20 | 35 | 56 |
| 4 | 1 | 5 | 15 | 35 | 70 | 126 |
| 5 | 1 | 6 | 21 | 56 | 126 | 252 |

vnitřkem jedné strany a čtyřrozměrným jádrem. V kombinatorice jsou tyto vektory známy jako *kompozice*. Ty lze uspořádat do schémat rozdělení. Pro $m = 5$ dostaneme:

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|----------|---|-------|--------------|---------------------|-------|----------|
| m=5 | 5 | | | | | 1 |
| 4 | | 41;14 | | | | 2 |
| 3 | | 32;23 | 311;131;113, | | | 5 |
| 2 | | | 221;212;122; | 2111;1211;1121;1112 | | 7 |
| 1 | | | | | 11111 | 1 |
| Σ | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | 16 |

Sloupcové součty normálních rovinných simplexů dávají tabulku 9.3.

Oba indexy v tabulce 9.3 byly sníženy o jednotku, k dosažení správného binomiálního koeficientu $\binom{k-1}{m-1}$. Měli jsme potíže s binomiálním koeficientem už dříve, když se objevily jako $\binom{m+n-1}{m}$. V tomto případě zaplňují matici jinak, jako v tabulce 9.4:

V obou tabulkách binomiálních koeficientů jejich prvky se získaly podobně, to jest jako součet dvou sousedů, levého a horního s tou výjimkou, že v tabulce 9.3 levý prvek se přidává pouze pokud $j \geq i$.

Připomeňte si operace s rozděleními a jejich počítáním podle dolní dovolené limity částí. Zde došlo k podobným posunům hodnot tabulek 9.3 a 9.4, avšak

Table 9.5: Kompozice vektorů s m částmi

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| m = 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | | 1 | 2 | 4 | 7 | 12 | 20 | 33 | 54 |
| 3 | | | 1 | 2 | 5 | 11 | 23 | 47 | 94 |
| 4 | | | | 1 | 2 | 5 | 12 | 25 | 59 |
| 5 | | | | | 1 | 2 | 5 | 12 | 28 |
| 6 | | | | | | 1 | 2 | 5 | 12 |
| | | | | | | | 1 | 2 | 5 |
| | | | | | | | | 1 | 2 |
| | | | | | | | | | 1 |
| Σ | 1 | 2 | 3 | 8 | 16 | 32 | 64 | 128 | 256 |

operaci provádí matice binomiálních koeficientů \mathbf{B}^T . Permutujeme k nenulových prvků s $(n - k)$ nulovými prvky a z části rovinného simplexu dostaneme celý simplex. Tedy tato část je diferencí $\Delta(n)$. Poněvadž existuje více rozdílů, toto je difference podle počtu vektorů n . V čtyřtěnu se jeden vrchol násobí čtyřikrát, jedna hrana šestkrát, jedna strana čtyřikrát, vnitřek pouze jednou.

Nyní se můžeme vrátit k tabulce 9.3. Její prvky mají rekurenci

$$b_{11} = 1; \quad b_{ij} = b_{i-1,j} + b_{i-1,j-1} \quad (9.13)$$

Generují se binomem

$$(1_i + 1)^m = 2^m. \quad (9.14)$$

Už jsme formulovali rekurentní vzorec tabulky 9.4 v (??). Všimněte si, že prvky tabulky 9.4 jsou součty všech prvků její předcházející řádky nebo sloupce, což je důsledek po sobě následujících aplikací (??).

Inverzní matice \mathbf{B}^{-1} k matici \mathbf{B} se získá z formálního binomu

$$(1_i - 1)^m = 0. \quad (9.15)$$

Je to právě matice \mathbf{B} , jejíž prvky se násobí střídavě znaménky $(-1)^{j-i}$.

9.8 Rozdíl $\Delta(m)$

Když jsme uspořádali vektorové kompozice do tabulky, zabývali jsme se pouze jejími sloupcovými součty. Existují také řádkové součty, které počítají kompozice klasifikované podle největšího vektoru m_k . Následné výsledky pro $n = m$ lze uspořádat do tabulky 9.5

Prvky c_{ij} tabulky 9.5 jsou součty polynomiálních koeficientů počítajících kompozice. Jejich sloupcové součty jsou 2^{j-1} . Pro $j \leq j/2$ prvky c_{ij} zůstávají konstantní. Například

Table 9.6: Fibonacciho čísla

| n | 1 | 2 | 3 | Σ |
|-----|---|---|---|----------|
| m=2 | 1 | | | 1 |
| 3 | 1 | | | 1 |
| 4 | 1 | 1 | | 2 |
| 5 | 1 | 2 | | 3 |
| 6 | 1 | 3 | 1 | 5 |
| 7 | 1 | 4 | 3 | 8 |

| Orbita | čet kompozic |
|---------------|--------------|
| $m - 3, 3$ | 2 |
| $m - 3, 2, 1$ | 6 |
| $m - 3, 1^3$ | 4 |
| Σ | 12. |

Pro $i = 2$ prvky c_{2j} jsou součty binomiálních koeficientů a jejich rekurence je

$$c_{2j} = \sum_{k=1}^{j/2} \binom{j-k}{k} = 2c_{2,j-1} - c_{2,j-3} \quad (9.16)$$

kde k je počet 2.

9.9 Druhá difference— Fibonacciho čísla

Když připustíme jako nejmenší prvek 2, dostaneme tabulku ?? bodů useknutých rovinných simplexů. Její řádkové součty jsou známé jako *Fibonacciho čísla*. V středověké aritmetické knize se objevily jako odpověď na otázku o počtu párů králíků v následujících vrzích.

Vektory počítané pro $m = 7$ jsou: 7; 52, 25, 43, 34; 322, 232, 223. Všimněte si, že prvky tabulky 9.6 jsou binomiální koeficienty posunuté v každém sloupci o 2 řádky. Fibonacciho čísla F_m mají rekurenci

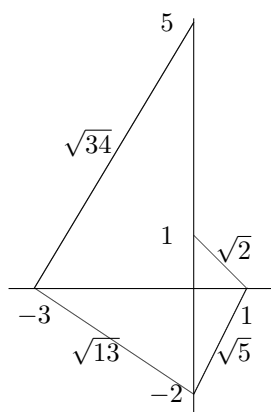
$$F_m = F_{m-1} + F_{m-2} . \quad (9.17)$$

Prvky tabulky 9.6, f_{ij} se získají přičtením 2 ke každému vektoru s $(j-1)$ nenulovými prvky nebo 1 k největšímu prvku j rozměrných vektorů

$$f_{21} = 1; f_{ij} = f_{i-2,j-1} + f_{i-1,j} \quad (9.18)$$

V každé řádce se opakují všechny prvky obou předcházejících řádků, což dává rekurenci Fibonacciho čísel.

Figure 9.2: Fibonacciho spirála. Čtverce přepon pravoúhlých trojúhelníků s následnými Fibonacciho odvěsnami jsou lichá Fibonacciho čísla



Jiné způsobem dosažení Fibonacciho čísla jsou kompozice, ve které všechny prvky jsou liché. Dostaneme řádký Pascalův trojúhelník:

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|---|---|---|---|---|---|----------|
| m=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 0 | 1 | | | | | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 1 | | | | 2 |
| 4 | 0 | 2 | 0 | 1 | | | 3 |
| 5 | 1 | 0 | 3 | 0 | 1 | | 5 |
| 6 | 0 | 3 | 0 | 4 | 0 | 1 | 8 |

Například poslední řádka počítá kompozice: 51, 15, 33; $4 \times (3111)$; 111111.

9.10 Fibonacciho spirály

Pokud nakreslíme na dvě ortogonální osy následná Fibonacciho čísla, potom přeponami spojujícími následné body odpovídajících pravoúhlých trojúhelníků jsou odmocniny čtverců Fibonacciho čísel F_{2k+1} (obr. 9.2). To ukazuje na identitu

$$F_{2k+1} = F_{k+1}^2 + F_k^2 \quad (9.19)$$

Podobná identita se získá pro sudá čísla z difference dvou čtverců Fibonacciho čísel, například $F_8 = F_5^2 - F_3^2 = 21 = 25 - 4$. Tato difference může být napsána jako součet součinů Fibonacciho čísel.

$$F_{2k} = F_{k+1}^2 - F_{k-1}^2 = F_k^2 + F_k F_{k-1} \quad (9.20)$$

Postupně rozložíme vyšší Fibonacciho čísla a vyjádříme koeficienty nižších Fibonacciho čísel jako:

$$F_{2k+1} = F_2 F_{2k} + F_1 F_{2k-1} = F_3 F_{2k-1} + F_2 F_{2k-2} = \dots \quad (9.21)$$

Objevuje se tu ještě jiný vzorec

$$F_{n+1} F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n \quad (9.22)$$

Například při $n = 5 : 3 \times 8 - 25 = -1$.

Tyto vztahy lze formulovat v maticové formě (s použitím znalosti co je determinant matice) jako

$$\begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n.$$

Tento vztah vede ke dvěma skutečnostem. Prvou jsou vlastní hodnoty matice, viz pozdější kapitoly, druhou je nulová mocnina této matice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 & F_0 \\ F_0 & F_{-1} \end{pmatrix}.$$

Na diagonále jsou hodnoty F_{n+1} a F_{n-1} . Tento fakt dává možnost prodloužit Fibonacciho čísla k záporným indexům. Tato série musí být: $1, -1, 2, -3, 5, -8, \dots$. Dostaneme tato čísla opět jako součty dvou následných Fibonacciho čísel, řádkové součty prvků \mathbf{B}^{-1} nebo jako prvky jejich vytvářející matice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^n.$$

Chapter 10

Mocninová série

10.1 Polynomiální koeficienty pro m permutace

Polynomiální koeficienty byly definovány pro permutace sloupců vektor-řádků. Je jasné, že takový koeficient musí být použitelný pro transponované vektor-řádky, to znamená, že pro vektor-sloupce. Zdá se, že není nutné mít některé speciální koeficienty pro permutace řádků vektor-sloupců, když jediným rozdílem by bylo, že odpovídající permutační matice působí na vektor zleva místo zprava. Avšak rozdílné situace se objevuje u řad symbolů, například $(\mathbf{aaabbccdef})^T$. Určíme snadno počet řad vytvořených polynomiálním koeficientem $10!/3!2!2!1!1!1!$.

Nemůžeme odlišit stejné symboly, tedy jejich vzájemné permutace jsou neúčinné jako permutace vektorů majících stejné délky. Avšak tento polynomiální koeficient se liší od polynomiálního koeficientu pro n permutace. Polynomiální koeficient pro n permutace permutuje počty n_k vektorů majících stejnou hodnotu m_k . Nyní se permutují výskyty jednotlivých vektorů \mathbf{j} , sečtené jako m_j . Z příkladu je jasné, že některé hodnoty m_j mohou být stejné pro více vektorů. Tady je použit nový index k (jeho hodnoty jsou totožné s číslem m_k samotným). Počet vektorů s hodnotou m_k je n_k a *polynomiální koeficient pro m permutace* se napíše jako

$$m! / \prod_{j=1}^n m_j! = m! / \prod_{k \geq 0} m_k!^{n_k}; \text{ kde } m = \sum_{j=1}^n m_j = \sum_{k \geq 0} n_k m_k. \quad (10.1)$$

M permutace transformují sekvence symbolů například $(\mathbf{dagfabccace})^T$, zatímco n permutace působí jako *substituce*, například $(\mathbf{abcceeeffgg})^T$. Substituce \mathbf{a} na \mathbf{e} nebyla přímá, avšak byla částí cyklu, mimo to se objevily \mathbf{g} (které nebyly v příkladě) avšak jako sloupec s nulovými prvky v abecední matici.

10.2 Naivní součiny polynomiálních koeficientů

V kapitole 7 jsme studovali symetrii zvláštní třídy naivních matic, majících jeden jednotkový prvek nejen v řádcích avšak současně v sloupcích. Všechny jdou k orbitě sestávající se pouze z jednoho bodu.

Nyní máme nalézt index symetrie dvou grup cyklických permutací působících současně na jiné naivní matice zleva a zprava:

$$\mathbf{P}_m \mathbf{N} \mathbf{P}_n . \quad (10.2)$$

Akce permutačních matic zleva počítá polynomiální koeficient pro m permutace (10.1), akce permutačních matic zprava počítá polynomiální koeficient pro n permutace (9.1). účinek permutace zprava je identický s n permutacemi sloupce vektoru-řádky \mathbf{m} sloupcových součtů naivní matice:

$$\mathbf{J}^T \mathbf{N} \mathbf{P}_n = \mathbf{m} \mathbf{P}_n . \quad (10.3)$$

Obě akce jsou nezávislé a tedy konečným výsledkem je právě součin obou koeficientů

$$\sum (n! / \prod_{k \geq 0} n!) (m! / \prod_{k \geq 0} m_k^{n_k}!) = n^m \quad (10.4)$$

Součet se provede přes všechny orbity rozdělení. Je to speciální případ Newtonova polynomiálního vzorce, kde koeficienty mající stejnou strukturu rozdělení se počítají dohromady polynomiálem pro n permutace¹. Konečný výsledek se získá snadno. Přesně n sloupců je umístěno v každé řádce, do které lze vložit jeden prvek. Individuální výběry v m řádcích jsou nezávislé a tedy se násobí.

Pravá strana je výsledkem známým jako *rozdělení m rozlišitelných věcí do n přihrádek*. Objekty jsou rozlišeny svým indexem i . Tento index je v součtu ztracen. Rozlišitelnost není vlastností věcí ale okolností². Všechny 1 v naivní matici je identické, pouze jejich polohy se mění. Pokud by byly rozdílné, bylo by nutné zavést třetí index, který dává jinou statistiku (viz později).

Rozdílem oproti cyklickému indexu (Rovnice 7.15) je druhý faktoriál $m!$ a faktoriály m_k místo jejich prvních mocnin. Když použijeme (10.2) pro rozdělení 1^m dostaneme $(n!/n_1!)(m!/1!^{n_1}) = m!$. Cyklický index štěpí S_m grupu na cyklické struktury.

10.3 Diference v mocninové sérii

Když uspořádáme polynomiální koeficienty do schémat rozdělení dostaneme opět sloupcové součty jako pro $m = n = 6$:

¹Identita je známá ve fyzice jako Polya-Brillouinova statistika. Avšak Brillouin a jiní nerozpoznali její klíčovou důležitost.

²To má důležitý filosofický důsledek. V předcházejícím století se diskutovala otázka, zda mikročástice jsou rozlišitelné nebo ne. Avšak pojem rozlišitelnosti byl špatně definován.

Table 10.1: Sekvence mocninové série

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|---|-----|-------|-------|-------|-----|----------|
| m=1 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 2 | 2 | | | | | 4 |
| 3 | 3 | 18 | 6 | | | | 27 |
| 4 | 4 | 84 | 144 | 24 | | | 256 |
| 5 | 5 | 300 | 1500 | 1200 | 120 | | 3125 |
| 6 | 6 | 930 | 10800 | 23400 | 10800 | 720 | 46656 |

Table 10.2: Diference $\Delta^n \mathbf{0}^m$

| n | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | $\Delta^n \mathbf{0}^m$ |
|-----|---|---|----|-----|------|------|-----|-------------------------|
| m=0 | 1 | | | | | | | 1 |
| 1 | | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | | 1 | 2 | | | | | 3 |
| 3 | | 1 | 6 | 6 | | | | 13 |
| 4 | | 1 | 14 | 36 | 24 | | | 75 |
| 5 | | 1 | 30 | 150 | 240 | 120 | | 541 |
| 6 | | 1 | 62 | 540 | 1560 | 1800 | 720 | 4683 |

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|----------|---|-----|-------|-------|-------|-----|---------------|
| m=6 | 6 | | | | | | 6 |
| 5 | | 180 | | | | | 180 |
| 4 | | 450 | 1800 | | | | 2250 |
| 3 | | 300 | 7200 | 7200 | | | 14700 |
| 2 | | | 1800 | 16200 | 10800 | | 18800 |
| 1 | | | | | | 720 | |
| Σ | 6 | 930 | 10800 | 23800 | 10800 | 720 | $46656 = 6^6$ |

Z následných schémat dostaneme tabulku 10.1:

V tabulce 10.1, pouze první sloupec a řádkové součty jsou zřejmě spojené s m a n^m . Mimo to se zde objevují faktoriály avšak jiné prvky rostou příliš rychle, aby se analyzovaly přímo. Avšak všechny prvky jsou dělitelné m . Tímto způsobem se tabulka 10.1 rozloží do přímého součinu dvou matic. Jednou z nich je matice binomiálních koeficientů $\binom{m}{k}$. To je matice \mathbf{B}^T . Druhou maticí je matice diferencí $\Delta^n \mathbf{0}^m$:

Už jsme se setkali se řádkovými součty $\Delta^n \mathbf{0}^m$ v tabulce 9.1 jako Eulerovými polynomiály $E_n(2)$. Tato čísla počítají naivní matice v dolní trojúhelníkové formě násobené mocninami 2^k . Například pro $m = n = 4$:

| n | 1 | 2 | | | 3 | | | 4 |
|---------------|-----|------|------|------|------|------|------|------|
| Základní řada | aaa | aaab | aabb | abbb | aabc | abbc | abcc | abcd |
| Permutace | 1 | 4 | 6 | 4 | 12 | 12 | 12 | 24 |
| Počty | 1 | 14 | | | 36 | | | 24 |

Binomiální koeficienty $\binom{m}{k}$ permutují nenulové sloupce s nulovými sloupci. Tabulka diferencí má první řádku a sloupec indexované nulovými indexy. Avšak obsahují, vyjma prvek 1_{00} , pouze nuly. To ruší účinek první řádky binomiální matice v přímém součinu.

Rekurence v tabulce 10.2 je jednoduchá

$$m_{00} = 1; m_{ij} = j(m_{i-1,j-1} + m_{i-1,j}) \quad (10.5)$$

V každém sloupci máme j možností, jak přidat nový prvek. Buď se přidá do obsazených sloupců, nebo se přidá do nového sloupce. Potom se jiné sloupce pouze posunou bez permutování.

Tabulka 10.1 je přímým součinem $c_{ij} = a_{ij} \times b_{ij}$. Když najdeme normální součin $(\Delta^n 0^m) \mathbf{B}^T$, dostaneme matici, jejíž prvky jsou mocniny j^i . Například

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| | | | | | | | 1 | 3 | 6 | |
| | | | | | | | | 1 | 4 | |
| 1 | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | |
| | 1 | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | |
| | | 1 | 2 | | | 1 | 4 | 9 | 16 | |
| | | | 1 | 6 | 6 | | 1 | 8 | 27 | 64 |

Ani tabulka 10.2 není elementární. Lze ji rozložit opět do matice Stirlingových čísel druhého druhu (tabulka 8.2) a diagonální matice faktoriálů $\Delta(j!)$, která násobí Stirlingovu matici zprava. Stirlingova čísla druhého druhu počítají naivní matice v dolní trojúhelníkové formě. Tato podmínka zajišťuje, že všechny sloupce tvoří základnu pro sloupcové permutace, když se odstraní restrikce dolní trojúhelníkové formy.

V jiném uspořádání můžeme vytvořit tabulku konečných diferencí jako v tabulce 10.3.

V nulovém sloupci se počítají řady simplexu, které nejsou v jeho diferencii. Prvky v dalších sloupcích jsou postupné rozdíly. Například prvky v $d_{30} = 14$ jsou: $b^3, c^3, b^3, 3b^2c, 3bc^2, 3a^2c, 3ac^2$. Sloupcové indexy odpovídají mocninám prvního indexu, například $d_{41} = 13 = ab^3 + 3ab^2c + 3abc^2 + 6abcd, 42 = 3 = a^2b^2 + 2a^2bc$. Když násobíme tuto matici transponovanou maticí binomiálních koeficientů \mathbf{B}^T , dostaneme na diagonále součin odpovídající mocniny n^n . Binomiální koeficient permutuje první vektor s jinými už permutovanými vektory.

Table 10.3: Diference mocninové série

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|-----|----|---|---|---|
| m=0 | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | |
| 2 | 1 | 1 | 1 | | |
| 3 | 14 | 3 | 1 | 1 | |
| 4 | 181 | 13 | 3 | 1 | 1 |

10.4 Operátorová algebra

Používali jsme operátorovou notaci vícekrát. Nyní bychom měli tuto notaci vysvětlit. Existuje *funkce identity* E a *funkce difference* Δ . Mimo to existují formální mocniny 0^n . Tyto funkce jsou definovány recipročně jako

$$\Delta^m 0^n = [E^m 0^n - 1]^m = \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} (-1)^j (m-j)^m \quad (10.6)$$

To dává pro odpovídající prvky matice součty mocnin indexu m:

- $\Delta^m 0^1 = 1 \times 1^m$,
- $\Delta^m 0^2 = 1 \times 2^m - 2 \times 1^m$,
- $\Delta^m 0^3 = 1 \times 3^m - 3 \times 2^m + 3 \times 1^m$.

Vypočteme pro n=3:

$$\begin{array}{llll} \Delta^m 0^3 & m=1= & 1 \times 3 - 3 \times 2 + 3 \times 1 & =0, \\ & m=2= & 1 \times 9 - 3 \times 4 + 3 \times 1 & =0, \\ & m=3= & 1 \times 27 - 3 \times 8 + 3 \times 1 & =6, \\ & m=4= & 1 \times 81 - 3 \times 16 + 3 \times 1 & =36. \end{array}$$

Původní funkce se obnoví součinem $\Delta^m 0^n$ s maticí binomiálů. To odpovídá formální rovnici

$$n^m = E^m 0^n = (1 + \Delta^m 0^n)^m. \quad (10.7)$$

řádkové součty tabulky 10.2 vzaté se střídajícími se znaménky (diference sudých a lichých sloupců) dává $(-1)^i$. Předpokládejme, že to platí pro nějakou řádku. Prvky příští řádky jsou právě násobené součty předcházející řádky:

$$d_{ij} = j(d_{i-1,j-1} + d_{i-1,j}) \quad (10.8)$$

Když provedeme diferenci $d_1 - 2(d_1 + d_2) + 3(d_2 + d_3) - \dots = -d_1 + d_2 - d_3 \dots$, dostaneme prvky předcházející řádky s jinými znaménky, jejichž součet byl +/- 1.

10.5 Diference dx a součty n^m

Mocnina n^m je binom, pokud napíšeme n jako součet $n = (n-1) + 1$. Potom

$$n^m = [(n-1) + 1]^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} (n-1)^k. \quad (10.9)$$

Například: $3^4 = (1 \times 1 + 4 \times 2 + 6 \times 4 + 4 \times 8 + 1 \times 16) = 81$. Členy binomu jsou rozdíly počtu řad rovinných simplexů podle jednoho vektoru (tento vektor musí mít předepsanou hodnotu).

Funkce n^m se může diferencovat ještě jiným způsobem. Když se podíváme na její tabulku 10.3, vidíme, že mocniny lze definovat jejich řádkovými rozdíly

$$(n^m - 1) = (n-1) \sum_{i=0}^m n^i. \quad (10.10)$$

Například $27 - 1 = 2(1 + 3 + 9)$. To můžeme psát jako součet rozdílů nekonečné řady $1/n^k$. Přidáme 1 k oběma stranám (??) napíšeme to jako

$$n^m = (n-1) \sum_{k=1}^{\infty} n^{m-k}. \quad (10.11)$$

Tato rovnice platí také pro $m = 1$ máme tedy

$$n/(n-1) = (n-1) \sum_{i=0}^{\infty} n^{-i} \quad (10.12)$$

Tato nekonečná sekvence se skrývá v nulovém simplexu, poněvadž čísla se zápornými mocninami $1/a^i$ nelze interpretovat jako geometrické body se záporným znaménkem, a^{-1} není identické s $-a$.

Pro součty prvních řádek se naleznou snadno následující identity

$$\sum_{k=1}^n k^0 = n; \quad \sum_{k=1}^n k^1 = \binom{n+1}{2}; \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2. \quad (10.13)$$

Všechny identity se snadno dokáží úplnou indukcí. Zejména pokud poslední platí pro n , potom pro $(n+1)$ máme

$$\binom{n+1}{2}^2 + \binom{n+1}{1}^3 = \binom{n+2}{2}^2.$$

To je ověřené přímými výpočty.

Všimněte si, že i -tá řádka tabulky 10.2 se získá postupně násobením této matice \mathbf{Q} zprava od $(i-1)$ -té řádky. \mathbf{Q} je diagonální matice indexů, které se ještě jednou opakují pod hlavní diagonálou jako v následujícím příkladě

Table 10.4: Rozdíly počtu přemístění

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|-----|-----|-----|-----|----|---|---|----------|
| m=0 | 1 | | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | 1 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | | | | 3 |
| 3 | 4 | 6 | 2 | 1 | | | 13 |
| 4 | 27 | 28 | 16 | 3 | 1 | | 75 |
| 5 | 187 | 214 | 104 | 31 | 4 | 1 | 541 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|----|----|--|--|
| | | | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | 2 | | | | |
| | | | | 2 | 3 | | | | |
| | | | | | 3 | 4 | | | |
| 1 | | | | 1 | | | | | |
| | 1 | | | 1 | 2 | | | | |
| | 1 | 2 | | 1 | 6 | 6 | | | |
| | 1 | 6 | 6 | 1 | 14 | 36 | 24 | | |

10.6 Některá klasifikační schémata

Můžeme klasifikovat naivní matice podobně jak jsme to udělali u permutačních matic. Takové klasifikace vedou někdy k složitým rekurentním vztahům. Například pokud napodobíme počet přemístění a počítáme počet prvků na hlavní diagonále ve vektorových řadách, dostaneme pro $(3, 3)$ následující dvě klasifikace

| | Rozdíl | Σ | Zbytek simplexu | Σ | Σ |
|----------|------------------------------------|----------|-------------------------------------|----------|----------|
| k=0 | <i>bca, cab, bab, ba</i> | 4 | <i>ccb, bcb, caa, cc</i> | 4 | 8 |
| 1 | <i>aaa, aab, bba, acb, bac, cb</i> | 6 | <i>bbb, ccc, cbb, bcc, aca, cac</i> | 6 | 12 |
| 2 | <i>aba, abb</i> | 2 | <i>bbc, cbc, aac, acc</i> | 4 | 6 |
| 3 | <i>abc</i> | 1 | | 0 | 1 |
| Σ | | 13 | | 14 | 27 |

Tabulka 10.3 ukazuje počet přemístění v diferencích simplexů, tabulka 10.4 ukazuje tento počet pro všechny naivní matice

Nebudeme analyzovat tyto vztahy, ale ukážeme jiný. Pokud řady v rovinných simplexech jsou klasifikovány podle počtu jednotkových vektorů n_1 , dostaneme difference, tabulka 10.5.

Prvky prvního sloupce tabulky 10.5 lze nazvat *podmocniny*, protože generují v řádcích jiné prvky, jejichž součty dávají mocniny n^n . Rekurence je

$$p_{i0} = 1 \quad p_{ij} = p_{i-j,0} [i!/(i-j)!]^2 \times 1/j! = p_{i-j,0} j! \binom{i}{j}^2 \quad (10.14)$$

Table 10.5: Rozdíly počtu přemístění v mocninové sérii

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|-----|----|-----|----|----|---|----------|
| m=0 | 1 | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 1 | | | 4 |
| 3 | 8 | 12 | 6 | 1 | | 27 |
| 4 | 85 | 104 | 54 | 12 | 1 | 256 |

Table 10.6: Diference mocnin podle n_1

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Σ |
|-----|------|------|-------|------|-------|-----|-----|----------|
| m=0 | 1 | | | | | | | 1 |
| 1 | 0 | 1 | | | | | | 1 |
| 2 | 2 | 0 | 2 | | | | | 4 |
| 3 | 3 | 18 | 0 | 6 | | | | 27 |
| 4 | 40 | 48 | 144 | 0 | 24 | | | 256 |
| 5 | 205 | 1000 | 600 | 1200 | 0 | 120 | | 3125 |
| 6 | 2556 | 7380 | 18000 | 7200 | 10800 | 0 | 720 | 46656 |

Tato rekurence se může rozdělit do dvou kroků. Nejprve k naivním maticím s $(i-j)$ prvky se přidá j jednotkových prvků a řádky se permutují s použitím binomiálního koeficientu $\binom{i}{j}^2$. Potom opakujeme permutace se sloupci s použitím stejného binomiálního koeficientu. Výsledek se musí opravit o permutace přidaných j jednotkových prvků mezi sebou, to se provede faktoriálním členem $1/j!$.

10.7 Klasifikace podle Dvou vektorů

Všechny body v diagramech rozdělení simplexů byly rozděleny do orbit. Ty se klasifikovaly podle velikosti největšího vektoru. Je možné počítat body a řady podle velikostí jednoho zvláštního vektoru. To lze provést pro více vektorů současně, výhodně pouze pro dva vektory, kdy klasifikace je rovinná. Opustíme sférickou perspektivu a budeme skenovat simplex podle dvou os. Jako příklad ukážeme klasifikaci trojúhelníku 3^3

| m_b | 0 | 1 | 2 | 3 | σ |
|-----------|---------|---------|---------|-------|----------|
| $m_a = 0$ | c^3 | $3bc^2$ | $3b^2c$ | b^3 | 8 |
| 1 | $3ac^2$ | 6abc | $3ab^2$ | | 12 |
| 2 | $3a^2c$ | $3a^2b$ | | | 6 |
| 3 | a^3 | | | | 1 |
| σ | 8 | 12 | 6 | 1 | 27 |

Pro (4, 4) simplex se získá podobně následující schéma

| m_b | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | Σ |
|-----------|----|-----|----|----|---|----------|
| $m_a = 0$ | 16 | 32 | 24 | 8 | 1 | 81 |
| 1 | 32 | 48 | 24 | 4 | | 108 |
| 2 | 24 | 24 | 6 | | | 54 |
| 3 | 8 | 4 | | | | 12 |
| 4 | 1 | | | | | 1 |
| Σ | 81 | 108 | 54 | 12 | 1 | 256 |

Nulová řádka a sloupec odpovídá simplexům 3^4 , jejich průřezu s_{00} a diagonále k 2^4 . Prvky se vypočítají jako součiny dvou binomiálních koeficientů a odpovídajících mocnin

$$\binom{m_a + m_b}{m_a} \binom{m}{m_a} (n-2)^{m-m_a-m_b} \quad (10.15)$$

Řádkové a sloupkové součty dvou vektorových schémat dávají jednu vektorovou klasifikaci

$$\binom{m}{m(n-1)^{m-m_a} (10.16)}$$

10.8 Klesající a stoupající faktoriály

V (10.6) se objevil poměr dvou faktoriálů $i!/(i-j)!$. Získal se z odpovídajícího binomu jeho násobením faktoriálem $j!$. Tento poměr je známý jako *klesající faktoriál* a značí se jako $(n)_k$. Smysl této notace klesajícího faktoriálu je, že je to součin k členů $(n-k)$, k jdoucích od 0 k $(k-1)$. Když uspořádáme klesající faktoriály do tabulky 10.7 klesající faktoriál má velmi jednoduchou inverzní matici.

Klesající faktoriály se mohou získat formálně z binomu

$$(k! + 1)^n \text{ nahrazujíc } k!^j = j!. \quad (10.17)$$

Zmínili jsme problém rozlišitelnosti věcí v rozdělení věcí do rozlišitelných přihrádek. Rozdělení nerozlišitelných věcí, získané jako součet polynomiálních koeficientů pro n permutace, vedlo k binomiálnímu koeficientu $\binom{m+n+1}{m}$. Potom jsme rozdělili m jednotek do m řádků a získali jsme polynomiální koeficient pro m permutace, protože tyto jednotky byly ekvivalentní. Součet součinů obou

Table 10.7: Klesající faktoriál a jeho inverzní matice

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|-----|-----|----|----|---|---|--|----|----|----|----|----|---|
| m=0 | 1 | | | | | | | 1 | | | | | |
| 1 | 1 | 1 | | | | | | -1 | 1 | | | | |
| 2 | 2 | 2 | 1 | | | | | | -2 | 1 | | | |
| 3 | 6 | 6 | 3 | 1 | | | | | | -3 | 1 | | |
| 4 | 24 | 24 | 12 | 4 | 1 | | | | | | -4 | 1 | |
| 5 | 120 | 120 | 60 | 20 | 5 | 1 | | | | | | -5 | 1 |

koeficientů dal n^m . Nyní přidáme třetí index k . Můžeme rozlišit, zda v řádce i ve sloupci j je 1_α nebo 1_β . Objevuje se tu konstantní číslo $m!$ permutací m objektů pro všechny body počítané součtem polynomiálních koeficientů pro n permutace. Výsledkem je

$$\sum_{k \geq 0} m!n! / \prod n_k! = (m+n-1)! / (n-1)! \quad (10.18)$$

Tato identita je známá jako *stoupající faktoriál* a používá se notace $(n)^m$. Oba stoupající a klesající faktoriály jsou ve vztahu jako

$$(n+m-1)_m = (n)^m. \quad (10.19)$$

Je možné definovat stoupající faktoriál jako klesající faktoriál záporných čísel

$$(n)^m = (-1)^m (-n)_m. \quad (10.20)$$

Například $(n)^2 = (n+2)(n+1)n = (-1)^3(-n)(-n-1)(-n-2)$.

10.9 Matice $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$

Už jsme spočítali kvadratické formy $\mathbf{N}^T\mathbf{N}$. Nyní budeme studovat jinou kvadratickou formu $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$. V se objevují bloky $\mathbf{J}\mathbf{J}_k^T$ získané jako vnější součiny jednotkového vektoru sloupce \mathbf{J}_k .

Například blok matic

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

se permutuje jako

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tyto bloky nemohou odlišit sekvence $(\mathbf{ababa})^T$ a $(\mathbf{babab})^T$. Pouze registrují, že na místech 1, 3, 5 byl jeden vektor a jiný vektor byl na místech 2 a 4.

Rozdíl mezi oběma kvadratickými formami lze srovnat se dvěma pozorovateli vlaků. $\mathbf{N}^T\mathbf{N}$ je pozorovatel sedící na vlaku. Registruje kolikrát jeho vlak se pohyboval, avšak nemůže říci, kdy. \mathbf{NN}^T je pozorovatel na kolejích registrující intervaly, kdy byly koleje využity, avšak nemůže říci, kterým vlakem.

Kvadratické formy³ \mathbf{NN}^T se počítají indexem známým jako *Bellův polynomiál*

$$m! / \prod_{k \geq 0} n_k! m_k!^{n_k} \quad (10.21)$$

Když jej srovnáme se součinem dvou polynomiálních koeficientů, vidíme, že ten byl dělen členem $n!/n_0!$. Tento člen se objevil jako operátor násobící všechna Stirlingova čísla druhého druhu, aby se dostaly rozdíly $\Delta^m 0^n$ (podkapitola 10.3). Tedy Bellovy polynomiály počítají Stirlingova čísla druhého druhu a jejich součty. Počet kvadratických forem \mathbf{NN}^T je identický s počtem naivních matic v dolní trojúhelníkové formě bez prázdných mezisloupců.

Když se Bellovy polynomiály porovnají s cyklickým indexem (7.15), vidíme, že se zde místo jednoduchých m členů objevují jejich faktoriály. Prvky ve sloupcích netvoří cykly ale nerozlišitelné podmnožiny. Stirlingova čísla generují rozdíly, pokud se násobí maticí faktoriálů a maticí mocnin, pokud se násobí klesajícími faktoriály:

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|----|----|----|---|----|
| | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | 2 | 2 | 2 | | 1 | 2 | 3 |
| | | | | 6 | 6 | | | 2 | 6 |
| | | | | | 24 | | | | 6 |
| 1 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 3 | 3 | 3 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 3 | 1 | 1 | 7 | 13 | 1 | 4 | 9 | 16 |
| 1 | 7 | 6 | 1 | 1 | 15 | 51 | 75 | 1 | 8 |
| | | | | | | | | | 27 |
| | | | | | | | | | 64 |

Když je nejnižší dovolená hodnota $m_j = 2$, polynomiály dávají asociovaná Stirlingova čísla druhého druhu, jejichž rekurence je

$$a_{ij} = j a_{i-1,j} + (i-1) a_{i-2,j-1} \text{ s } a_{00} = 1. \quad (10.22)$$

³Kvadratické formy \mathbf{NN}^T dlouhých řad tvoří velmi zajímavé vzory.

Figure 10.1: Kónus hlasovacích čísel. Koordináty **a** jsou vždy větší než koordináty **b**

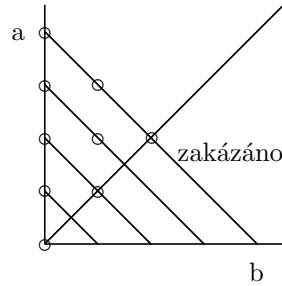


Table 10.8: Fibonacciho a hlasovací čísla

| | Fibonacciho čísla | | | | | | | | Hlasovací čísla | | | | | | |
|-----|-------------------|---|---|---|---|---|---|--|-----------------|----|----|----|----|---|---|
| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| m=1 | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | | |
| 2 | | 1 | | | | | | | | 1 | | | | | |
| 3 | 1 | | 1 | | | | | | -1 | | 1 | | | | |
| 4 | | 2 | | 1 | | | | | | -2 | | 1 | | | |
| 5 | 1 | | 3 | | 1 | | | | 2 | | -3 | | 1 | | |
| 6 | | 3 | | 4 | | 1 | | | | 3 | | -4 | | 1 | |
| 7 | 1 | | 6 | | 5 | | 1 | | -2 | | 9 | | -5 | | 1 |

10.10 Hlasovací čísla

V podkapitole 9.8 byly zavedeny Fibonacciho čísla se singulární maticí. Pokud přemístíme její prvky jako v tabulce 9.7, dostaneme matici, kterou lze invertovat. Kladné prvky inverzní matice jsou známé jako *hlasovací čísla*.

Ve skutečnosti jsou všechna hlasovací čísla kladná. Záporná znaménka se objevují po násobení s \mathbf{I}^* z obou stran. Počítají binární řady, ve kterých jedna strana má vždy výhodu danou pravidlem síta $m_{ai} \geq m_{bi}$. Počítané řady vedou pouze v polovině dvou rozměrného kónusu (obr. 10.1). Inverzní Fibonacciho matice počítá řady, jejíž prvky jsou **b** a dvě následná $\mathbf{aa} = \mathbf{a}^2$. Například $f_{75} = 5$ počítá řady $\mathbf{b}^5\mathbf{a}^2$, $\mathbf{b}^4\mathbf{a}^2\mathbf{b}$, $\mathbf{b}^3\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^2\mathbf{a}^2\mathbf{b}^3$, $\mathbf{ba}^2\mathbf{b}^4$.

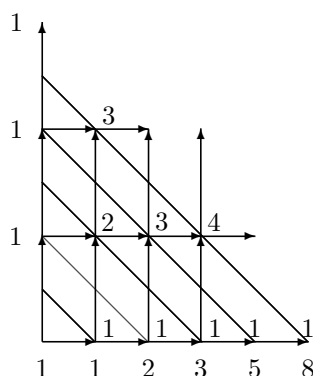
Odpovídající mřížka je zobrazena na obr. 10.2. Fibonacciho čísla f_{ij} jsou vytvořeny rekurzí

$$f_{11} = 1; f_{ij} = f_{i-1,j-1} + f_{i,j-2}. \quad (10.23)$$

Hlasovací čísla b_{ij} jsou vytvořeny rekurzí

$$b_{11} = 1; b_{ij} = b_{i-1,j-1} + b_{i-1,j+1}, \quad (10.24)$$

Figure 10.2: Fibonacciho mřížka. Liché vektory \mathbf{a} se netvoří. Fibonacciho čísla počítají omezené řady



Můžeme formulovat také tabulku, jejíž prvky počítají řady, ve kterých $m \geq m_b^2$. Její prvky jsou $b_{ij} = b_{i-1,j-1} + b_{i-2,j}$ a je to opět zředěná matice binomiálních koeficientů.

Inverzní matice s kladnými znaménky je

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|-----|---|---|----|---|---|---|---|---|---|
| n=0 | 1 | | | | | | | | |
| 1 | | 1 | | | | | | | |
| 2 | | | 1 | | | | | | |
| 3 | 1 | | | 1 | | | | | |
| 4 | | 2 | | | 1 | | | | |
| 5 | | | 3 | | | 1 | | | |
| 6 | 3 | | | 4 | | | 1 | | |
| 7 | | 7 | | | 5 | | | 1 | |
| 8 | | | 12 | | | 6 | | | 1 |

Maticové prvky, čísla b_{ij} , jsou vytvořena rekurzí

$$b_{11} = 1; \quad b_{ij} = b_{i-1,j-1} + b_{i-1,j+2} . \quad (10.25)$$

Počítají řady s prvky a^3 a b .

10.11 Diference jiného druhu

U všech bodů (prvků) prostoru můžeme měřit vzdálenosti (rozdíly) od jiných bodů. Tyto vzdálenosti jsou vyvolány jejich speciálními funkcemi. Jako příklad zavedeme difference $[2^m + 1] - \binom{m}{j}$, zobrazené v tabulkové formě v tabulce refD-iference binomiálních koeficientů

Inverzní matice má prvky v tabulce 10.10

Table 10.9: Diference binomiálních koeficientů

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|----|----|----|----|---|---|
| m=0 | 1 | | | | | |
| 1 | 2 | 1 | | | | |
| 2 | 4 | 3 | 1 | | | |
| 3 | 8 | 7 | 4 | 1 | | |
| 4 | 16 | 15 | 11 | 5 | 1 | |
| 5 | 32 | 31 | 26 | 16 | 6 | 1 |

Table 10.10: Diference m^2

| j | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|----|----|-----|----|----|---|
| m=0 | 1 | | | | | |
| 1 | -2 | 1 | | | | |
| 2 | 2 | -3 | 1 | | | |
| 3 | -2 | 5 | -4 | 1 | | |
| 4 | 2 | -7 | 9 | -5 | 1 | |
| 5 | -2 | 9 | -16 | 14 | -6 | 1 |

Když neuvažujeme znaménka $(-1)^{m+j}$, čtverce $(m-1)$ jsou v třetím sloupci, v druhém sloupci jsou první difference $(m+1)^2 - m^2$ a v prvním sloupci druhé difference, které jsou od druhé řádky konstantní. Prvky vyšších sloupců jsou rozdíly prvků předchozích sloupců

$$m_{ij} = m_{i-1,j-1} - m_{i-1,j} , \quad (10.26)$$

podobně jako všechny součty v matici binomiálních koeficientů.

Jiné možnou dekompozicí tabulky 10.10 je na součet dvou tabulek binomiálních koeficientů $\mathbf{B}_{m,j} + \mathbf{B}_{m-1,j-1}$.

Takové diferenční tabulky lze konstruovat pro jakékoliv mocniny po sobě následujících čísel. Jejich inverzní matice nemají žádnou tak jednoduchou interpretaci jako rozdíly čtverců.

10.12 Lahova čísla

Je nesnadné ukázat všechny vztahy mezi všemi prostorovými funkcemi. Lahova čísla \mathbf{L} jsou jednoduše zavedena jejich tabulkou 10.11

Ve skutečnosti původní Lahova čísla \mathbf{L} mají v lichých řádcích záporná znaménka a potom

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{I}; \text{ nebo } \mathbf{L}^{-1} = (-1)^{i+j} \mathbf{L} . \quad (10.27)$$

Table 10.11: Lahova čísla \mathbf{L}

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|-----|-----|-----|-----|----|---|----------|
| m=1 | 1 | | | | | 1 |
| 2 | 2 | 1 | | | | 3 |
| 3 | 6 | 6 | 1 | | | 13 |
| 4 | 24 | 36 | 12 | 1 | | 73 |
| 5 | 120 | 240 | 120 | 20 | 1 | 501 |

Table 10.12: Difference jako součin $\mathbf{S}_2\mathbf{S}_1$

| n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|-----|-----|-----|-----|----|---|----------|
| m=1 | 1 | | | | | 1 |
| 2 | 2 | 1 | | | | 3 |
| 3 | 6 | 6 | 1 | | | 13 |
| 4 | 26 | 36 | 12 | 1 | | 75 |
| 5 | 150 | 250 | 120 | 20 | 1 | 541 |

Prvky tabulky 10.11 jsou přímými součiny klesajících faktoriálů s binomiálními koeficienty

$$l_{ij} = i!/j! \binom{i-1}{j-1}. \quad (10.28)$$

Rekurence Lahových čísel je

$$l_{i+1,j} = (i+j)l_{ij} + l_{i,j-1} \quad (10.29)$$

Jiná možnost vyvolat Lahova čísla je součin matic Stirlingových čísel obou druhů. Matice Stirlingových čísel druhého druhu se násobí maticí Stirlingových čísel prvního druhu zprava:

$$\mathbf{L} = \mathbf{S}_1\mathbf{S}_2. \quad (10.30)$$

V důsledku vztahu obou druhů Stirlingových čísel je inverze Lahovy matice identická s touto maticí.

Transponovaný pořádek násobení Stirlingových čísel dává jinou tabulku 10.12, tentokrát diferencí $\Delta(n)n^n$

Při násobení matice Stirlingových čísel prvního druhu maticí Stirlingových čísel druhého druhu dává stejný výsledek jako permutace sloupců naivních matic v dolní trojúhelníkové formě s j sloupci s nenulovými prvky permutační matice \mathbf{P} s i řádky a sloupci a j cykly. Uspořádání zajišťuje, že prázdné sloupce se nepermutují z jejich polohy. Tabulka 10.12 počítá řady podle počtu sloupců v dolní trojúhelníkové formě, které nebyly permutované ze své polohy. Prvky

jejího prvního sloupce jsou, vyjma první prvek, $2\Delta^{n-1}0^{n-1}$. Počítají se matice v dolní trojúhelníkové formě s vedoucím prvkem **a** a druhým prvkem buď **a** nebo **b**.

Chapter 11

Mnohorozměrné krychle

11.1 Úvod

úvodem této kapitoly zopakujeme některá fakta o krychlích, která byl už byla dříve vysvětlena. Používali jsme jako vytvářející funkci mocniny vektorových množin $(\Sigma e_j)^m$. Získali jsme vektorové řady \mathbf{N} vedoucím k bodům na rovinách ortogonálních k jednotkovému diagonálnímu vektoru \mathbf{I} . Nalezli jsme matematické operace, které uspořádaly tyto maticové vektory \mathbf{N} na sférické orbity a zmínili jsme některé možnosti, jak vytvořit z rovinných simplexů jejich komplexy, to je kladné kónusy ve vektorovém prostoru. Také jsme ukázali, že krychle nebo obecně jakékoliv rovnoběžníky se tvoří z rovinných komplexů vynecháním příliš dlouhých vektorů. Tradiční přístup, kartézský součin n jedno rozměrných komplexů dává pouze body a žádné vektorové řady

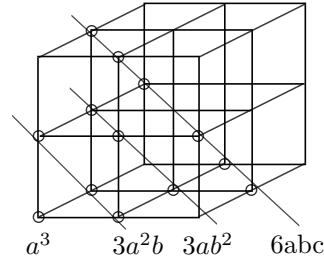
$$(1 + a + a^2) \times (1 + b + b^2) = 1 + a + a^2 + b + ab + b^2 + a^2b + ab^2 + a^2b^2. \quad (11.1)$$

Tyto n rozměrné krychle se tvoří obvykle kartézskými součiny n jedno rozměrných komplexů, například:

$$(1 + a + a^2) \times (1 + b + b^2) = 1 + (a + b) + a^2 + ab + b^2 + a^2b + ab^2 + a^2b^2. \quad (11.2)$$

Prvé tři simplexu jsou úplné, avšak poslední dva jsou useknuty. Mimo to nevznikají všechny řady. Nyní se budeme zabývat krychlemi systematicky. Zejména ukážeme, jak se vektorové řady transformují a krychle body rovinných simplexů do orbit. Tato transformace je možná interpretací transponovaných naivních matic \mathbf{N}^T jako tváří (obr. 1.4), vektorů určujících koordináty bodů v m rozměrném prostoru. Každá vektorová řada odpovídá jednomu bodu a všechny řady rovinného simplexu se mapují na body m rozměrné krychle, jejíž strana je $(n - 1)$. Tato transformace není jednoduchou úlohou. To lze ukázat na mapování 3 rozměrné roviny na 4 rozměrnou krychli se stranami 0-2.

Figure 11.1: Diference třírozměrné krychle se stranami 0 – 2. Rozdíl tvoří body dotýkající se povrchu krychle nejbližšího ke středu koordinát. Body difference mají koordináty (permutované): $(0, 0, 0)$; $(0, 0, 1)$; $(0, 1, 1)$; $(0, 1, 2)$



| Momenty: | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|---------------|----------|---|---|----|----|----|----|----|---|---|----------|
| řady roviny: | b=0 | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 | 16 |
| | 1 | | 4 | | 12 | | 12 | | 4 | | 32 |
| | 2 | | | 6 | | 12 | | 6 | | | 24 |
| | 3 | | | | 4 | | 4 | | | | 8 |
| | 4 | | | | | 1 | | | | | 1 |
| Body krychle: | Σ | 1 | 4 | 10 | 16 | 19 | 16 | 10 | 4 | 1 | 81 |

Řady z rozdílů orbit se počítají dohromady, poněvadž mají stejné *momenty*. Nové orbity jdou od 0 k $m(n-1)$. Některé ze známých funkcí dostávají novou interpretaci, avšak ještě bude nutné zavést nějaké nové funkce.

Pro rovinné simplex je zavedli rozdíl, které mají poněkud podivnou vlastnost. Zahrnují jeden vrchol, jednu neúplnou hranu a jednu neúplnou stranu. Avšak když transponujeme naivní matice \mathbf{N} a interpretujeme je jako tváře, vidíme, že tyto vlastnosti znamenají, že difference krychle je obsazená svými body dotýkajícími se svého povrchu nejbližší ke středu koordinát, majícími alespoň jednu nulovou koordinátu, alespoň jednu koordinátu jedna a tak dále ve více rozměrných krychlích (obr. 11.1).

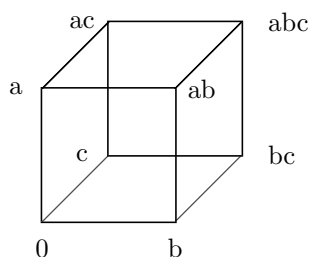
11.2 Jednotkové krychle

Jednotkové krychle jsou pro začátek nejpoučnější. Mají n stran a na každé straně existují právě dva body, 0 a 1. Generují se funkcí

$$\prod_{j=1}^n (1 + \mathbf{e}_j) = 2^n. \quad (11.3)$$

Například pro $n = 3$ dostaneme body: $1, a, b, c, ab, ac, bc, abc$ (obr. 11.2). Jednou z nejzajímavějších vlastností jednotkových krychlí, ve kterých jsou možné

Figure 11.2: Tři rozměrná krychle se stranou 0-1

Table 11.1: Řady v jednotkové krychli \mathbf{F}

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|-----|---|---|----|----|-----|-----|----------|
| m=0 | 1 | | | | | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | | | | | 2 |
| 2 | 1 | 2 | 2 | | | | 5 |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 6 | | | 16 |
| 4 | 1 | 4 | 12 | 24 | 24 | | 65 |
| 5 | 1 | 5 | 20 | 60 | 120 | 120 | 326 |

pouze celé koordináty, je, že jsou tvořeny pouze povrchem. Není tu žádný bod uvnitř představující jejich střed.

V teorii množin n rozměrné krychle jsou známy jako *booleány*. Booleány obsahují množinu, prázdnou množinu a všechny podmnožiny. V jednotkových krychlích existuje $(m+1)$ orbit rozdělení, z každého rovinného simplexu existuje právě jedna orbita. Počet bodů na každé orbitě je určen odpovídajícím binomiálním koeficientem. Co se má určit je počet řad v jednotkových krychlích, avšak studovali jsme i tuto funkci a tento počet je daný klesajícím faktoriálem $(i)_{(i-j)}$. Opět si jej prohlédneme. Napíšeme jej v inverzním uspořádání vzhledem k tabulce 10.6

Prvky tabulky 11.1 f_{ij} se získají jako součin binomiální matice \mathbf{B} a diagonální matice faktoriálů $\Delta(j!)$:

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}\Delta(j!). \quad (11.4)$$

Můžeme vybrat k objektů (vektorů) z n objektů potom je permutovat. To se provede jako formální binomiálu, když se zachází s následnými faktoriály jako s mocninami

$$(n)_m = [(k)_i + (n-k)_i]^m \text{ kde } (k)_i^j = (k)_j. \quad (11.5)$$

Například pokud $n = 5, m = 3$ a vybereme $k = 2$, výsledek je

$$(5)_3 = 60 = \binom{3}{0}(2)_3(3)_0 + \binom{3}{1}(2)_2(3)_1 + \binom{3}{2}(2)_1(3)_2 + \binom{3}{3}(2)_0(3)_3 =$$

$$1 \times 0 \times 1 + 3 \times 2 \times 3 + 3 \times 2 \times 6 + 1 \times 1 \times 6 .$$

Počítá se 18 permutací řad s dvěma symboly, řekněme

$$a, b : 6(abc, abd, abe) ;$$

36 permutací buď s a nebo b : $6(acd, ace, ade, bcd, bce, bde)$ a 6 permutací řady cde . $(2)_3 = 0$; není možné vytvořit sekvenci tří symbolů z pouze dvou symbolů. řádkové součty jsou dány jednoduše jako

$$S_m = m(S_{m-1}) + 1 \quad (11.6)$$

Je možné přidat nový objekt do předcházejících řad m způsoby, vyjma nulovou řadu. Jinou možností dosažení matice 11.1, je násobení matice počtu přemístění \mathbf{R} (tabulka 7.3) maticí binomiálních koeficientů

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{B}. \quad (11.7)$$

Jinak jsou řady v jednotkové krychli vytvořeny podobně jako faktoriály ze subfaktoriálů Appleovým polynomiálem D . Zde to je polynomiál druhého řádu, $(D+2)^2$, například

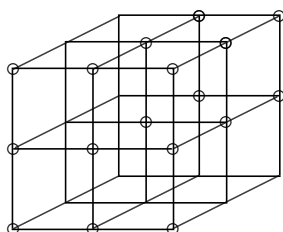
$$44 + 5 \times 9 \times 2 + 10 \times 2 \times 4 + 10 \times 1 \times 8 + 5 \times 0 \times 16 + 1 \times 1 \times 32 = 326 .$$

Je dobře známo, že v Přírodě mnoho jevů se popisuje binomickým rozdělením. Když hodíte n mincí současně, potom výsledky zaplní vrcholy jednotkové krychle rovnoměrně, zejména pokud se experiment opakuje vícekrát. Alespoň to předpokládá teorie pravděpodobnosti. Méně známá je derivace jiné statistiky vytvořené jednotkovou krychlí. Předpokládejme, že registrujeme nehody. Mějme S_m osob s nejvýše m nehodami a průměrnou nehodovostí 1 na osobu. Za takových podmínek vybereme jako nástroj registrace řadu k jednotek z m symbolů pokud jiných $m - k$ míst se využívá pro indexování osob. Takový rejstřík bude mít následující kapacitu: Bude v něm $m!$ osob s žádnou nehodou, $m!$ osob s jednou nehodou, m osob s $(m-1)$ nehodami nakonec pouze jedna osoba s m nehodami. Takové rozdělení nehod je známé jako *Poissonovo rozdělení*. Používá se obvykle při nízké nehodovosti a potom se nutně mění podmínky. Nicméně pokud Einstein řekl, že Bůh nehraje kostky, můžeme říci, že on sám je Kostka. Házení mincí nebo kostek pouze modeluje ideální prostor.

Table 11.2: Orbity rozdělení v krychli 0-2

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | Σ |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----------|
| m=0 | 1 | | | | | | | | | | | | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | | | | | 3 |
| 2 | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | | | 6 |
| 3 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | | | 10 |
| 4 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | | | 15 |
| 5 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | | | 21 |
| 6 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 | 1 | 28 |

Figure 11.3: Vznik třírozměrné krychle se stranou 0-2 ze čtverce se stranou 0-2 (prázdné kroužky). Přidá se jednotková třírozměrná krychle se stranou 0-1 (zaplněné kroužky) a strany se doplní



11.3 Orbity rozdělení v krychlích

Orbity rozdělení v krychli odpovídají bodům rovinných simplexů. Tedy známe jejich celkový počet. Také jsme shora ukázali, jak rozdílně se mapují tyto body na rovinné simplex a krychle. Už jsme zjistili, že indexování orbit v jednotkových krychlích je velmi jednoduché.

Orbity rozdělení v m rozměrných krychlích jejichž strany jsou 0-2 se snadno naleznou. Výsledky jsou uvedeny v tabulce 11.2. Ukázali jsme v podkapitole 11.1, jak její řádka $m=4$ se získá z bodů rovinného simplexu.

Některé vlastnosti rozdělení orbit jsou jasné. Jsou symetrické podle parametru k . To plyne ze symetrie krychle. Počet orbit na rovinách blízko nulového bodu není závislý na rozměrnosti krychle a zůstává konstantní. Je určen počtem k a nemůže být větší než počet neomezených rozdělení $p(k)$. Pokud použijeme konstantu c jako délku stran krychlí, diagonála k jde od 0 k cm .

Když pozorujeme řádkové rozdíly v tabulce 11.3, vidíme, že jsou vždy 1 na posledních $(m+1)$ obsazených místech. Tato čísla jsou právě počty orbit rozdělení v m rozměrné jednotkové krychli. Ve 3 rozměrném prostoru ji lze nakreslit (obr. 11.3). Ke čtverci se stranou 0-2 se přidá jednotková třírozměrná krychle se stranou 0-1 (zaplněné kroužky) a strany se doplní. Orbity 111 je

Table 11.3: Body v krychli s $c=2$

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|-----|---|---|----|----|----|----|----|---|---|----------|
| n=0 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | | | | | 9 |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 7 | 6 | 3 | 1 | | | 27 |
| 4 | 1 | 4 | 10 | 16 | 19 | 16 | 10 | 4 | 1 | 81 |

vytvořena z orbity 11, která nebyla v čtverci, 211 nebo 221 se získá z 21, 22 vytváří 221 a 222. To naznačuje rekurenci orbit rozdělení. Tu lze zobrazit graficky:

| | |
|------------|---|
| | 0 < MOMENTY > mc < > m(c+1) |
| | Orbity m rozměrné krychle s menší velikostí (c-1) Orbity (m-1) rozměrné krychle stejné velikosti |
| Σ : | Orbity m rozměrné krychle s velikostí c |

Poněvadž krychle jsou symetrická podél svých diagonál, lze obrátit pořadí poloh sčítanců. Například

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | 1 | 1 | 2 | 1 | 1 | | | | |
| 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 1 | 1 | | 1 | 1 | 2 | 2 |

Definujeme počet orbit $p(m,n,c)$ na rovině m n rozměrné krychle se stranou c , máme

$$p(m, n, c) = p(m, [n - 1], c) + p([m - n], n, [c - 1]) . \quad (11.8)$$

11.4 Body v krychlích

Známe celkový počet bodů s přirozenými koordinátami (jinak objem m^n) v krychli, nyní chceme určit jejich rozdělení podle jejich momentů v rovinných simplexech. Pokud výchozí simplexy nejsou useknuty, tato čísla musí být binomiální koeficienty $\binom{m+k-1}{k}$. Podobná čísla se objeví na ohonech rozdělení. Z prvních krychlí s $c = 2$, lze snadno dedukovat rekurenci

Zde je rekurence jednoduchá. Ke každému bodu $(n - 1)$ rozměrné krychle přidáme novou stranu s c body. Přičtením 0, 1 jednoduše sečítáme $(c + 1)$ orbit rozdělení méně rozměrné krychle. Například člen 19 v poslední řádce se získá jako $6 + 7 + 6$. Vzorec je

$$c_{ij} = \sum_{k=0}^c c_{i-1,j-k} . \quad (11.9)$$

Table 11.4: Vektorové řady v krychli s $c=2$

| m | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|-----|---|---|----|----|-----|-----|------|------|------|----------|
| n=0 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | | | | | | | 3 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 6 | 6 | | | | | 19 |
| 3 | 1 | 3 | 9 | 24 | 54 | 90 | 90 | | | 271 |
| 4 | 1 | 4 | 16 | 60 | 204 | 600 | 1440 | 2520 | 2520 | 7365 |

Nový vektor se všemi svými možnými hodnotami se přidá ke každému rozdělení na vhodném místě.

Jiná možnost, jak vyrobit krychle, je zvyšovat rozměr c krychle. Krychle rozdílných rozměrů m se násobí transponovanou maticí binomiálních koeficientů jak následuje. Počet bodů větší krychle se objevuje na diagonále

| | | | | | | | | |
|----|---|---|---|--|----|----|----|----|
| | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | | | | 1 | 2 | 3 |
| | | | | | | | 1 | 3 |
| | | | | | | | | 1 |
| 1 | | | | | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | | | | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 9 | 3 | 1 | | | 9 | 12 | 16 | 21 |
| 27 | 9 | 3 | 1 | | 27 | 36 | 48 | 64 |

Tří rozměrná krychle s $c = 2$ má 27 bodů. Transformuje se na tří rozměrnou krychli s $c = 3$ přičtením 3×2 rozměrných krychlí (čtverců), 3×1 rozměrných krychlí (hran) 1×0 rozměrných krychlí, bodu s koordinátami $(3, 3, 3)$. Nové diagonální prvky v inverzním uspořádání, 64, 16, 4, 1, tvoří novou základnu další krychle. Aby se zvýšila velikost krychle, je nutné znovu uspořádat diagonální prvky a opakovat násobení.

11.5 Vektorové řady v krychlích

V podkapitole 11.2 jsme ukázali, že v jednotkových krychlích se řady počítají klesajícími faktoriály. Pro jiné krychle se počty řad neurčí tak snadno, avšak není to zas až tak nesnadné, pokud to provedeme postupně. Například pro $c = 2$ dostaneme tabulku 11.4.

Abychom ukázali, jak jsou vytvořeny prvky tabulky 11.4, ukážeme výsledek pro s_{45} : $600 = 90 + 5 \times 54 + 10 \times 24$. Získali jsme body v krychlích sečítáním $(c+1)$ prvků méně rozměrné krychle (11.9). V tomto případě je nutné permutovat přidané symboly se symboly odpovídající řady s $(n-1)$ symboly. To se provede násobením odpovídajících čísel s binomiálními koeficienty. Rekurence je tedy

Table 11.5: Řady v 2 rozměrných krychlích

| k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Σ |
|-----|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----------|
| c=0 | 1 | | | | | | | | | 1 |
| 1 | 1 | 2 | 2 | | | | | | | 5 |
| 2 | 1 | 2 | 4 | 6 | 6 | | | | | 19 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 8 | 14 | 20 | 20 | | | 69 |
| 4 | 1 | 2 | 4 | 8 | 16 | 30 | 50 | 70 | 70 | 201 |

$$s_{ij} = \sum_{k=0}^c \binom{m}{k} s_{i-1,j-1} . \quad (11.10)$$

Jiná možnost jak dostat větší krychli zvětšováním stran n rozměrné krychle dává také možnost, jak nalézt rekurentní vzorce počtu řad. Pro $n = 2$ (čtverce), dostaneme tabulku 11.5.

Rekurence je

$$s_{i0} = 1; \quad s_{ij} = s_{i-1,j-1} + s_{i,j-1}; \quad s_{ij} = 0, \text{ mimo krychli} . \quad (11.11)$$

Vždy jsou dvě možnosti, jak prodloužit řady, vyjma řady vedoucí k zadním stranám. Prvá odpovídá členu $s_{i,j-1}$, na druhou možnost uvnitř čtverce se pamatuje počítáním řad z menšího čtverce $s_{i-1,j-1}$.

Je také možné posunout krychli v jejím prostoru, kdy její bod s nejnižším momentem nesouhlasí s počátkem soustavy koordinát. Počet orbit a bodů se nezměnil touto operací, avšak počet řad ano.

11.6 Přirozené krychle - e konstanta

Ukázali jsme, že jednotkové krychle jsou vytvořeny vzorcem 1.3. Člen 1 v $(1 + \mathbf{e}_j)$ se interpretoval jako \mathbf{e}_j^0 . Objem krychle závisí na její základně m a na její rozměrnosti n . Nyní budeme studovat, jaký má krychle objem e , pokud se její strana blíží k jedné a její rozměrnost k nekonečnu. Pokusíme se nalézt, jakou hodnotu má limita

$$e = \lim_{z \rightarrow \infty} (1 + 1/z)^z \quad (11.12)$$

Argument v 11.6 může být buď kladný nebo záporný.

Základna e krychle leží mezi krychlemi s celými čísly $1 < (1 + 1/z) < 2$. Když $z = 1$, výsledkem je 1.5 místo 2^1 . Když $z = 2$, výsledkem je $1.5^2 = 2.25$ místo 2^2 . Vyhodnocením binomiálního rozvoje (11.7), dostaneme nerovnosti

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1/k! < e = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{z}{k} 1/k! < 1 + \sum_{k=0}^{\infty} 1/2^k = 3 . \quad (11.13)$$

S použitím sofistikovaných matematických argumentů lze dokázat, že číslo e musí být větší než součet inverzních faktoriálů. Poněvadž by měl být současně menší, nejlepší řešení je to, kde obě limity jsou totožné. Konstanta e je iracionální číslo a její prvé číslice jsou $e = 2.71828 \dots$. Součet inverzních faktoriálů se blíží rychle k přesné hodnotě. Tedy prvních sedm členů dává

$$e = 1 + 1 + 1/2 + 1/6 + 1/24 + 1/120 + 1/720 = 2,71805 .$$

Příští člen je $1/5040 = 0.000198$. Opravuje čtvrté decimální místo.

Pokud z je záporné, substituce $z = -(t+1)$ se vloží do vzorce (11.7), a pak nějaké úpravy ukazují, že se získá opět číslo e :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} [1 - 1/(t+1)]^{-(t+1)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} [t/(t+1)]^{-(t+1)} = \\ \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/z)^{t+1} \times \lim_{t \rightarrow \infty} (1 + 1/z) &= e \times 1 = e . \end{aligned} \quad (11.14)$$

Vytvořující funkce e krychle má některé důležité vlastnosti, které z ní dělají užitečný nástroj. Když se použije substituce $x = az$, limitou výrazu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + a/x)^x = e^{\text{exp}(a)} \quad (11.15)$$

je a -tá mocnina čísla e . Tato vlastnost čísla e se využívá při použití e jako základny přirozených logaritmů.

Když se vrátíme k funkci rostoucího faktoriálu (10.8), který počítá řady v jednotkových krychlích, potom počet všech řad v nekonečné jednotkové krychli se může vyjádřit s použitím konstanty e :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n! \sum_{k=0}^{\infty} 1/k! = en! . \quad (11.16)$$

Poznámka: Aby se natřela polovina vnějších stran krychlového kanistru v nekonečně rozměrném prostoru, je potřeba více barvy, že je objem kanistru.

Chapter 12

Matice s celými čísly

12.1 Na úvod varování

Tato kapitola zůstane pouze náčrtem. Důvodem je, že je prakticky nemožné pojednat její obsah systematicky, jak se to provedlo s naivními maticemi. Zbytek kapitoly se využije pro zavedení nějakého materiálu, který patří do následujících kapitol.

12.2 Matice s jednotkovými symboly

Zahájili jsme naše studia permutačními maticemi majícími v každé řádce a sloupci pouze jeden jednotkový symbol. Potom jsme přidali naivní matice, majícími toto omezení pouze pro řádky a transponované naivní matice, kde se použilo pro sloupce. Příštím krokem je dovolit, aby jednotky byly vloženy na jakékoliv dosažitelné místo matice. Už víme, že počet těchto matic bude určen binomiálním koeficientem. Pro matice s m sloupci a n řádky, s k jednotkové prvky v matici počet možných konfigurací bude určen binomiálním koeficientem $\binom{mn}{k}$. Tyto konfigurace se mohou spočítat s použitím tabulek majících dvě orbity rozdělení do řádků a také do sloupců. Například pro $m = n = k = 4$ dostaneme tabulku 12.1.

Tabulka 12.1 dává představu. V prostoru se objevily nové vektorové řady. Ty vedou ke stejným bodům jako naivní matice, avšak jejich orbity nejsou jednoduchými orbitami rozdělení avšak *vzorovými orbitami*, které jsou součiny dvou rozdělení, jednoho pro řádky a druhého pro sloupce.

Například vzor vytvořený součinem rozdělení (211×310) je

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

To je Ferrersův graf. Existuje 6 možných permutací řádků tohoto vzoru (všechny řádky jsou rozdílné), které se kombinují s permutacemi čtvrté nulové

Table 12.1: Rozdělení jednotkových matic $m = n = k = 4$

| Rozdělení | 4 | 31 | 22 | 211 | 1111 | Σ |
|--------------------|---|-----|-----|------|----------|----------|
| | | | | | N | |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 | 4 |
| 31 | 0 | 0 | 0 | 144 | 48 | 192 |
| 22 | 0 | 0 | 36 | 144 | 36 | 216 |
| 211 | 0 | 144 | 144 | 720 | 144 | 1152 |
| $1^4 \mathbf{N}^T$ | 4 | 48 | 36 | 144 | 24 | 256 |
| Σ | 4 | 192 | 216 | 1152 | 256 | 1820 |

řádky. Dva sloupce jsou stejné. Tedy existují 3 možné permutace, které se kombinují s permutacemi čtvrtého nulového sloupce.

Součin rozdělení (211×211) má dva vzory:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se všemi možnými $36 = 3! \times 3!$ permutacemi řádků a sloupců a druhý

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

s 9 permutacemi nulového prvku označeného *. Jednotkové prvky zaplňují pouze označený řádek a sloupec. Tyto permutace vzorů se násobí 16 permutacemi čtvrté řádky a sloupce s nulovými prvky. Je snadné spočítat všechny permutace daného vzoru, avšak je nesnadnější nalézt všechny vzory vytvořené daným součinem rozdělení.

Celkový počet jednotkových vektorů s konstantními součty je daný řádkovými nebo sloupcovými součty prvků tabulek podobných tabulce 12.1. Pro potíže s notací uvedeme vzorec pouze pro sloupcové součty, kde můžeme použít symbol n_i pro počet identických binomiálních koeficientů

$$\sum (n! / \prod n_i!) \binom{m}{k_j}^{n_j} = \binom{mn}{k}; \sum_{j=1}^n k_j = k. \quad (12.1)$$

Součet se provede přes všechna možná rozdělení. Součin binomiálů není omezený jakýmkoliv podmínkami na sloupcové součty a tedy jednotky v každé řádce mohou být rozděleny nezávisle, potom se řádky získané takovým způsobem permutují ($n = m$), avšak $n!$ nadhodnocuje permutace řádků se stejnými součty, tedy výsledek se musí podělit částečnými faktoriály.

Table 12.2: Matice s prvky ≥ 1

| Rozdělení | 4 | 31 | 22 | 211 | 1111 | Σ |
|-----------|-----|-----|-----|------|------|----------|
| 4 | 16 | 48 | 24 | 48 | 0 | 136 |
| 31 | 48 | 288 | 144 | 288 | 0 | 768 |
| 22 | 24 | 144 | 72 | 144 | 0 | 384 |
| 211 | 48 | 288 | 144 | 288 | 0 | 768 |
| Σ | 136 | 768 | 384 | 768 | 0 | 2056 |
| 1111 | 4 | 192 | 216 | 1152 | 256 | 1820 |
| Σ | 140 | 960 | 600 | 1920 | 256 | 3876 |

12.3 Matice s přirozenými čísly

Nyní se příští krok zdá být snadný. Matice je mn rozměrný vektor a pokud lze do ní umístit k jednotkových prvků bez jakéhokoliv omezení, počet všech možných vektorů je daný binomiální koeficientem (10.2) $\binom{mn+k}{k}$. Tabulka 12.1 by měla být doplněna 2056 novými vstupy, aby se dostalo $\binom{19}{4}$ rozdílných matic místo $\binom{16}{4}$ matic s jednotkovými prvky. Nové vzory zaplňují tabulku odlišně, viz tabulku 12.2

Je prakticky nemožné sledovat všech možné vzory maticových vektorů, jak jsme to provedli dříve. Jedna jejich zvláštní třída byla studována systematicky, matice mající v každé řádce přesně dva jednotkové symboly. Tyto vzory se rozvinuly do speciální větve matematiky, teorii grafů (viz příští kapitolu).

V předcházejících kapitolách jsme sečítali vektory rozdělení, to je počet Ferrersových grafů. To je současně počet diagonálních vzorů odpovídající kvadratickým formám naivních matic. Tyto vzory lze srovnávat se symetrickými jednotkovými vzory $\mathbf{J}\mathbf{J}_j^T$ matic s m_j prvky, což je vzor čísla Σm_j^2 .

12.4 Interpretace matic s přirozenými čísly

Pokud diagonální matice se promítá na jednotkový vektor řádku \mathbf{J}^T , výsledkem je vektor řádku odpovídající vektoru řádce zobecněných matic s přirozenými čísly. Je tedy možné psát takovou matici jako řadu projekcí kvadratických forem naivních řad na následné jednotkové vektory řádky.

$$(\mathbf{J}_1^T \mathbf{N}_1^T \mathbf{N}_1, \mathbf{J}_2^T \mathbf{N}_2^T \mathbf{N}_2, \mathbf{J}_3^T \mathbf{N}_3^T \mathbf{N}_3)^T. \quad (12.2)$$

Jiné možnosti budou ukázané později. Můžeme interpretovat matici \mathbf{M} společně s její transponovanou maticí \mathbf{M}^T , vzatou v blokové formě

$$\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M}^T \\ \mathbf{M} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

jako matici sousedství \mathbf{A} dvojdílného grafu s násobnými hranami (viz příští kapitulu).

12.5 Matice koordinát

Interpretovali jsme řádky v matici jako řady následných vektorů. Existuje ještě jiný výklad. řádky jsou také simultánní vektory určující polohy rozdílných bodů nebo objektů. Matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

dává pro dva rozdílné body (nebo objekty) stejnou adresu. To je možné, pokud adresa $(1, 0)$ je například dům nebo box. Tedy je nutné studovat možnost, že matice definují polohy m bodů v prostoru, že jsou to seznamy koordinát v ortogonálních osách. Takový seznam tvoří *matici koordinát* \mathbf{C} , jejíž prvky c_{ij} jsou koordináty m bodů (vrcholů, objektů) i na n osách.

Matice sloupec

$$\mathbf{A} = (0, 1, 2, 3, 4)^T$$

určuje koordináty pěti bodů ležících na přirozené číselné ose. Mezi všemi body jsou jednotkové vzdálenosti.

Matice

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^T$$

určuje koordináty pět bodů otočených do dvou rozměrné roviny. Jinou přímkovou konfigurací pěti bodů je rovinný simplex

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$$

To jsou příklady nejjednodušších pravidelných struktur pěti bodů, rovnoměrně rozmístěným přímým řetězcem.

Pokud se najdou kvadratické formy $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ matic koordinát, mají na svých diagonálách čtverce Euklidovských vzdáleností každého bodu od středu soustavy koordinát

Příklad \mathbf{A}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix}$$

Příklad \mathbf{B}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 12 & 16 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 24 \\ 0 & 8 & 16 & 24 & 32 \end{pmatrix}$$

Příklad **C**

$$\begin{pmatrix} 16 & 12 & 8 & 4 & 0 \\ 12 & 10 & 6 & 3 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

Mimodiagonální prvky jsou kvadratické součiny obou vzdálenosti i a j .

Koordináty bodů tvoří v prostoru struktury. Pokud řetězec je ohebný, může se navinout na hraný jednotkové krychle

D

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zde jsou umístěny čtyři body na vrcholy třírozměrné krychle. Jinou konfigurací je

E

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zde všechny čtyři koordináty v prvním sloupci jsou nuly. Ty lze tedy zanedbat. První bod leží ve středu soustavy koordinát, druhý na konci druhého jednotkového vektoru, třetí na konci třetího jednotkového vektoru. Body jsou ve vztahu jako v třírozměrném rovinném komplexu. Vzdálenosti mezi nimi nejsou stejné. První bod je v jednotkové vzdálenosti k ostatním třem bodům, vzdálenosti mezi těmito třemi body jsou zdvojeny.

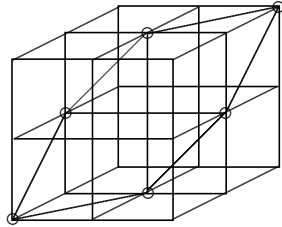
Konfigurace čtyř bodů určená maticí koordinát

F

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

odpovídá pravidelnému čtyřstěnu. řetězec je navinut na jeho vrcholy.

Figure 12.1: Dvě diagonální řady v třírozměrné krychli 0-2. Najdi zbývající čtyři



12.6 Orientované a neorientované grafy jako vektorové řady

Pokud nakreslíme difference dvou vektorů ($\mathbf{e}_b - \mathbf{e}_a$), jako na obr. 3.2, odpovídá to přijatým konvencím pro kreslení orientovaných hran orientovaných grafů (viz příští kapitolu). Incidenční matice \mathbf{S} grafu je jen diferencí dvou naivních matic

$$\mathbf{S} = \mathbf{N} - \mathbf{N}_b,$$

jak byl ukázáno v části 3.3. Je to operátor, který převádí vektorovou řadu v jinou. Vektorová řada je kontinuální cesta ve vektorovém prostoru, operátor převádějící jednu vektorovou řadu v jinou je také kontinuální. Zdá se, že je to plocha mezi dvěma řadami vektorů řádek, a mohli bychom si ji představit jako plochu. Avšak, když provedeme následné rozdíly u všech párů jednotkových vektorů, dostaneme opět lineární vektor. Smyčka převádí jednotkový vektor v sám sebe. Všechny tyto vektory leží v rovině ortogonální k jednotkovému diagonálnímu vektoru \mathbf{I} .

Jiná možnost, jak interpretovat orientované grafy je difference uvnitř samotných řad. Například řada **abcd**a obsahuje přechody **a** na **b**, **b** na **c**, **c** na **d** a **d** na **a**. Rozdíl je tedy:

$$\begin{array}{rclcl} \mathbf{a} & \rightarrow & \mathbf{b} & & \\ & \mathbf{b} & \rightarrow & \mathbf{c} & \\ & & \mathbf{c} & \rightarrow & \mathbf{d} \\ & & & \mathbf{d} & \rightarrow \mathbf{a}. \end{array}$$

Podobně se mohou porovnávat rozdíly při větších vzdálenostech.

Orientované úplné grafy K_n tvoří 2 rozměrné hrany (známé jako orientované hrany) rovinných simplexů. Neorientované grafy jsou řady vektorů ortogonálních k plochám odpovídajících orientovaných grafů. Neorientované úplné grafy K_n jsou vektorové řady jdoucí od středu koordinát k nejvzdálenějšímu konci jednotkové krychle, jejíž strany jsou diagonály n rozměrné jednotkové krychle, nebo jinak, k nejvzdálenějšímu konci krychle se stranou 0-2, jak je

ukázané na obr. 12.1. Jiné grafy odpovídají multimnožinám z těchto základů, definovaných jako rozdíly nebo součty naivních matic. Hrany a orientované hranový grafů tvoří prostor, jehož symetrie je složitější než symetrie naivních matic.

Rekurzivní definice kanonické formy incidenční matice \mathbf{S} úplného orientovaného grafu K_n je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{S}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1} \\ -\mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{J}_{n-1} \end{pmatrix} \quad (12.3)$$

kde $\mathbf{0}_{n-1}$ je nulový vektor-sloupec. Podobně je kanonická forma úplného neorientovaného grafu K_n

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{n-1} & \mathbf{0}_{n-1} \\ \mathbf{I}_{n-1} & \mathbf{J}_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (12.4)$$

12.7 Kvadratické formy incidenční matice.

Jednoduché cvičení v násobení matic ukazuje, že kvadratické formy incidenčních matic neorientovaných a orientovaných grafů mají formu

$$(\mathbf{N}_+^T \mathbf{N})_b^T (\mathbf{N}_a + \mathbf{N}_b) = (\mathbf{N}_{\mathbf{N}a}^T + \mathbf{N}_b^T \mathbf{N}_b) + (\mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b + \mathbf{N}_b^T \mathbf{N}_a) \quad (12.5)$$

$$(\mathbf{N}_-^T \mathbf{N})_b^T (\mathbf{N}_- \mathbf{N}_b) = (\mathbf{N}_{\mathbf{N}a}^T + \mathbf{N}_b^T \mathbf{N}_b) - (\mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b + \mathbf{N}_b^T \mathbf{N}_a) \quad (12.6)$$

Kvadratické formy jsou složené ze dvou částí: Diagonální matice \mathbf{V} tvořené součtem kvadratických forem dvou naivních matic \mathbf{N}_a a \mathbf{N}_b . Diagonální prvky v_j jsou známé jako *stupně* odpovídajících vrcholů.

Součet skalárních součinů

$$(\mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_b + \mathbf{N}_b^T \mathbf{N}_a)$$

tvoří mimodiagonální prvky. Je známý jako matice sousedství \mathbf{A} grafu. Její prvky a_{ij} ukazují, které vrcholy sousedí a v multigrafech, tolik linek spojuje oba vrcholy. Pro to je nutné mít v incidenční matici identické jednotkové řádky nebo jednu řádku s odmocninou násobnosti řádky.

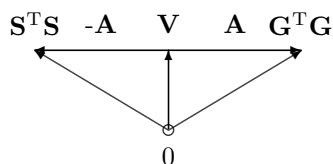
Diagonální matice \mathbf{V} a matice sousedství \mathbf{A} se mohou získat jako součet nebo rozdíl kvadratických forem neorientovaného a orientovaného grafu

$$\mathbf{V} = 1/2(\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \mathbf{S}^T \mathbf{S}) \quad (12.7)$$

$$\mathbf{A} = 1/2(\mathbf{G}^T \mathbf{G} - \mathbf{S}^T \mathbf{S}) \quad (12.8)$$

Vztah obou kvadratických forem je ukázaný schématicky na obrázku 12.2. Hilbertova délka diagonálního vektoru \mathbf{V} je $2m$, dvojnásobek počtu řádků v incidenční matici. Maticový vektor sousedství \mathbf{A} má stejnou délku a je opačně orientovaný v obou kvadratických formách, tedy $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ a $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ končí na rozdílných

Figure 12.2: Dekompozice kvadratických forem $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ a $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ na diagonální vektor \mathbf{V} a maticový vektor sousedství \mathbf{A} . $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ a $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ jsou ortogonální



rovinách. Pokud graf je *pravidelný*, $v_j = \text{const}$, potom diagonální matice \mathbf{V} je kolineární s jednotkovým diagonálním vektorem \mathbf{I} a matice sousedství \mathbf{A} má také stejný směr.

Diagonální prvky matice sousedství \mathbf{A} jsou nuly. Je tedy možné použít je nedůsledně pro záznam smyček u grafu se smyčkami. U orientovaných grafů řádky odpovídající smyčkám jsou nulové. Avšak u neorientovaných grafů řádka odpovídající smyčce má hodnotu 2, což dává jako čtverec 4 a s použitím vzorců 12.7 a 12.8 hodnota smyčky 2 se objevuje automaticky.

Jiné kvadratické formy $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ a $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ mají na diagonále 2 a počet jednotkových vektorů v řádcích incidenční matice. To je v souladu s faktem, že každá spojnice se registruje dvakrát v matici \mathbf{V} stejně jako v matici \mathbf{A} . Mimodiagonální prvky jsou ± 1 , pokud dva řádky sousedí a mají společný vrchol. Mimodiagonální prvky tvoří takovým způsobem matice sousedství liniových grafů. Avšak u orientovaných grafů tento výklad je znesnadněn znaménky, která mohou být kladná i záporná. Tento vzor znamének závisí na vzájemné orientaci orientovaných hran. Nelze jej předvídat a musí se určit odděleně.

12.8 Incidenční matice úplných grafů K_n jako operátory

Jednotkové matice \mathbf{J} (\mathbf{J}^T) jsou operátory, které sečítají řádku (nebo sloupec) prvků matice, na kterou působí, nebo přenášejí je do výsledného vektoru-řádky (nebo vektoru-sloupce). V kanonické formě incidenčních matic úplných grafů K_n se jednotkové matice \mathbf{J} kombinují s jednotkovými maticemi \mathbf{I} se zápornými znaménky. Incidenční matice úplných grafů K_n jsou rámcové operátory¹. Operace rámování se použije na kvadratické formy matic koordinát dvakrát. Nejprve se orámuje $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$ je orámované

$$\mathbf{S}(*)\mathbf{S}^T \quad (12.9)$$

nebo

$$\mathbf{G}(*)\mathbf{G}^T. \quad (12.10)$$

¹Je podivné, že takové elementární věci lze objevit na konci dvacátého století. Možná byly jen zapomenuty.

Výsledkem této operace je větší matice s $\binom{n}{2}$ řádky a sloupce. Prvky v součinu jsou rozdíly (součty) všech párů prvků orámované matice. Součin se štěpí na diagonální a části. Diagonální část se opět orámuje, nyní v rámečku shrnujícím diagonální prvky zpět do n rozměrné symetrické matice

$$\mathbf{S}^T(*)\mathbf{S} \quad (12.11)$$

nebo

$$\mathbf{G}^T(*)\mathbf{G} \quad (12.12)$$

Tato operace tvoří druhou diferenci (součet) $\binom{n}{2}$ prvních diferencí (součtů).

Jednotková diagonální matice \mathbf{I} dává $\mathbf{S}(\mathbf{I})\mathbf{S}^T$. To je matice $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ úplného grafu K_4 . Čtyři diagonální prvky \mathbf{I} se rozvinuly do šesti diagonálních prvků součinu. Diagonální prvky (2) jsou rozdíly koordinát (nebo čtverce vzdáleností, poněvadž $\mathbf{I} = \mathbf{I}^2$) čtyř vrcholů pravidelného čtyřstěnu. Diagonální prvky jsou uspořádány zpět do čtyř rozměrů jako v 12.11 nebo 12.12.

12.9 Bloková schémata

Jak jsme řekli, je možné studovat systematicky matice s libovolným počtem jednotkových prvků v řádce. Z praktických důvodů tento počet musí být konstantní jinak by byly pouze speciální konfigurace dostupné pro výpočty. Z matic majících k jednotkových prvků v každé řádce byly studovány pouze matice mající zvláštní vlastnosti odpovídající vlastnostem úplných grafů. Takové matice jsou zvané *bloková schémata* \mathbf{B} a dávají kvadratické formy

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = (l - r)\mathbf{I} + r\mathbf{J}\mathbf{J}^T \quad (12.13)$$

kde r je konektivita bloku. Někdy se klade na bloková schémata přísnější podmínka, jejich matice musí být čtverce jednotky a jejich obě kvadratické formy ekvivalentní

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}\mathbf{B}^T. \quad (12.14)$$

Neorientovaný úplný graf K_3 je blok s $l = 3$, $r = 1$. Jiné K_n nejsou bloky, poněvadž v jejich $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ se objevují nulové prvky.

Rovnice 12.9 ukazuje, že každý jednotkový vektor \mathbf{e}_j se musí objevit v schématu l -krát, každé pár prvků r -krát. Čísla m , n , k , l , r jsou omezena následujícími podmínkami

$$mk = nl \quad (12.15)$$

$$l(k - 1) = r(n - 1) \quad (12.16)$$

(12.15) počítá počet jednotek v řádcích a sloupcích, (12.16) páry v řádcích, $mk(k-1)/2$ a v kvadratické formě $rn(n-1)/2$. Když se podělí obě strany $1/2$, výsledek se zjednoduší na konečný tvar. Nejjednodušším příkladem blokového schématu je matice s $m = n = 4, k = l = 3, r = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bloková schémata s $k = 3$ jsou známá jako Steinerovy trojky. Je jasné, že konstrukce blokových schémat a nalezení jejich počtu není jednoduchá úloha. Pokud máte zájem, doporučuje se kniha [8].

12.10 Hadamardovy matice

Jinou zvláštní třídou matic jsou *Hadamardovy matice* \mathbf{H} s prvky $h_{ij} = \pm 1$ a kvadratickými formami

$$\mathbf{H}^T \mathbf{H} = \mathbf{H} \mathbf{H}^T = n \mathbf{I}. \quad (12.17)$$

To znamená, že všechny řádky a sloupce Hadamardovy matice jsou ortogonální. Příklady dvou nejnižších Hadamardových matic jsou:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hadamardovy matice mohou být symetrické stejně jako asymetrické. Existují některá pravidla, jak je možné konstruovat Hadamardovy matice vyšších řádů. Konstrukce je snadná při $2n$ rozměrné matici, kde bloky nižší matice se mohou použít jako stavební kameny

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}_n & \mathbf{H}_n \\ \mathbf{H}_n & -\mathbf{H}_n \end{pmatrix}.$$

Chapter 13

Grafy

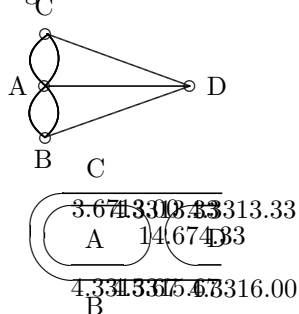
13.1 Historické poznámky

Teorii grafů formuloval, podobně jako tolik jiných pojmů v této knize, Euler. Před druhou světovou válkou celá teorie grafů mohla být shrnuta do pouze jediné knihy. Dnes existuje řada specializovaných časopisů zabývajících se teorií grafů a jejími aplikacemi.

Euler formuloval základní ideu teorie grafů, když vyřešil hlavolam o sedmi mostech v Königsbergu (obr. 13.1). Je možné projít přes všechny mosty a vrátit se zpět do výchozího místa, když se přejde každý most pouze jednou? Euler ukázal, že žádaná cesta existuje pouze tehdy, když ve všech křižovatkách se stýká sudý počet cest. Tři cesty se stýkaly v některých křižovatkách v Eulerově grafu. Tedy v Königsbergu jednoduchá cesta byla nemožná.

Člověk se diví, pokud by taková konfigurace mostů byl v Athénách, zajímali by se tamní filosofové na svých promenádách o takové triviální problémy a pokud by je vyřešili podobně jako Euler, udělali by to pro všechny podobné konfigurace cest? Nebo nebyl hlavolam o 7 mostech jen dětskou hříčkou? Je potřeba určitá zralost, abychom se zajímali o vztahy, které nelze vidět a jen si

Figure 13.1: Sedm mostů v Königsbergu a Eulerovo grafové řešení hlavolamu



je představit?

Doposud všech problémy v této knize byly vyřešeny násobením rozdílných možností a jejich sečítáním. Podstatně by staří Řekové byli schopni je rozřešit, avšak zajímali se o geometrické problémy, kde problém a jeho řešení lze vidět. Možnou odpovědí na shora danou otázku je, že multidimensionální prostory jsou příliš abstraktní, aby se s nimi začínalo.

Výhodou teorie grafů je, že grafy spojují abstraktní pojmy s konkrétností. Mohou se nakreslit na papír a postupně prohlížet jako soustava bodů a čárek. Avšak tato jednoduchost je klamavá.

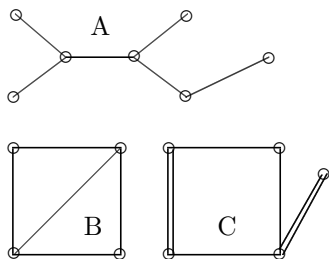
Grafy se obvykle považují za binární vztah dvou množin, *vrcholů* a *hran* nebo *orientovaných hran*, viz obr. 3.2. Je možné definovat teorii čehokoliv a zde se objevily velmi zajímavé problémy vhodné pro to, aby byly studovány mladými adepty akademických stupňů, jako například je teorie her. Avšak některé grafové problémy našly velmi brzo praktické aplikace nebo analogie ve fyzikálních vědách. Zejména chemie dala mnoho podnětů pro využití teorie grafů, poněvadž v grafech byl nalezen příslušný model konektivit atomů v molekulách. Zdá se být nepodstatné studovat procházky mezi vrcholy grafů avšak, když jsou tyto procházky spojené přímo se složitými měřitelnými fyzikálními vlastnostmi chemických sloučenin, jako je bod varu, potom takové teoretické studie se sávjí pragmatickými, dávají nám hluboko jdoucí náhled, jak je náš svět konstruován.

Grafy byly spojené s mnoha rozdílnými maticemi: *incidenčními maticemi* \mathbf{S} a \mathbf{G} , *maticemi sousedství* \mathbf{A} , *maticemi vzdáleností* \mathbf{D} a jinými druhy matice. Všechny tyto matice se využily pro výpočty vlastních hodnot a vlastních vektorů, avšak rozdílné matice nebyly spojené do sjednocené soustavy. Matematici byli uspokojeni s faktem, že všechny grafy mohou být stlačené do třírozměrného prostoru a zobrazené na dvou rozměrné ploše papíru. Ignorovali problém rozměrnosti grafů. Různí autoři je považovali za bezrozměrné objekty, jednorozměrné objekty či dvourozměrné objekty. Podle Occamovy břitvy se nemá zavádět více faktorů, než je nutné pro vysvětlení pozorovaných faktů. Avšak při pojetí grafů jako multidimensionálních vektorů se speciální konfigurací sjednocuje teorii, grafy jsou jen zvláštní třídou vektorů, sou čtyř nebo rozdílů dvou vektorových řad. Tyto vektory patří do vektorového prostoru. Vlastnosti součtů nebo rozdílů dvou vektorových řad se mohou studovat výhodně, pokud se představí jako grafy, srovnají s existujícími objekty nebo alespoň s malými vzorky vtších struktur.

13.2 Některé základní pojmy teorie grafů

Teorie grafů má dvě základní pojmy. Prvým je *vrchol*, který je obvykle zobrazen jako bod, avšak vrcholy mohou být ztotožněny s čímkoliv, také s plochou zahrnující mnoho vrcholů, pokud se teorie grafů použije k praktickým problémům. Druhým pojmem jsou *hrany* představující vztah mezi dvěma vrcholy. Hrany mohou být *orientované*, jako jsou vektory, jdoucí od vrcholu v jinému, potom jsou zvané *orientované hrany*, anebo *neorientované*, jen spo-

Figure 13.2: Příklady neorientovaných grafů. A – strom, B – cyklický graf, C – multigraf



jující dva vrcholy bez jakékoliv preference směru. Potom jsou zvané *hrany* (obr. 3.2).

Orientovaná hrana představují řádku incidenční matice \mathbf{S} tvořenou diferencí dvou jednotkových vektorů ($\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$). Podle naší konvence působí oba vektory současně a počátek vektoru může být umístěn na vrchol j . Výsledný orientovaný hranový vektor jde přímo z vrcholu j do vrcholu i . Hrany se zobrazují jako jednoduché hrany spojující dva vrcholy. Ve skutečnosti součet dvou jednotkových vektorů je ortogonální k hraně spojující oba vrcholy. Je instruktivnější kreslit neorientovaný graf se spojujícími hranami. Nicméně z formálních důvodů můžeme uvažovat neorientovaný graf jako řadu vektorů, kde každý člen je ortogonální ke svému orientovanému odpovídajícímu prvku. Když je orientovaný graf vektor, potom neorientovaný graf také musí být vektor.

Speciální hranou v grafu je *smyčka*, která spojuje vrchol sám se sebou. Objevují se formální potíže, jak spojit orientované smyčky s maticemi, protože odpovídající řádky jsou nulové ($\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_j = \mathbf{0}$). Tyto komplikace jsou výsledkem symetrií vyšších řádů. Neorientovaná smyčka má dvojitou intenzitu

$$(\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j) = 2\mathbf{e}_j, \quad (13.1)$$

a uvidíme později, jak se tento fakt může využít.

Vztahy mezi věcmi mohou být věci. Například v chemii, pokud ztotožníme atomy v molekule s vrcholy, potom vazby mezi atomy, držící molekulu pohromadě a určující strukturu molekuly, jsou vazebné elektrony. Síly mezi jádry a elektrony se modelují grafy pokud do každé spojující hrany se vloží nový vrchol a tak vznikne *podrozdělený graf*. Každá hrana v graf se štěpí do páru hran. Vytvořený podrozdělený graf má $(n + m)$ vrcholů a $2m$ řádek.

Můžeme konstruovat *hranový graf* 13.3, záměnou řádek za vrcholy a zaváděním nových sousedství nyní definovaných společnými vrcholy dvou původních řádek. Pokud původní graf měl m hran, součet stupňů jeho vrcholů v_j byl $2m$. Jeho hranový graf má m vrcholů a součet stupňů jeho vrcholů v_i je

$$\Sigma(v_j^2 - v_j). \quad (13.2)$$

Figure 13.3: Graf a jeho hranový graf

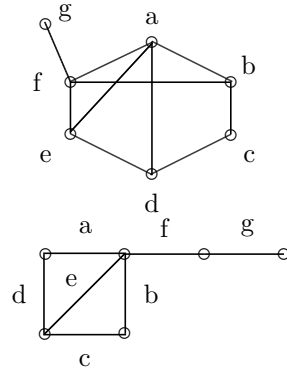
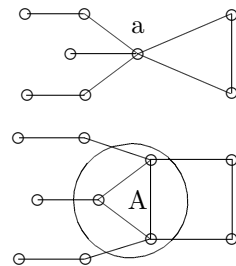


Figure 13.4: Restrikce grafu. Vrcholy v kružnici A jsou spojené do jednoho vrcholu a



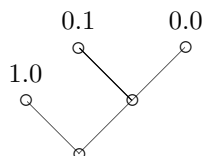
Pár vrcholů může být spojený více současně hranami. Potom mluvíme o *multigrafech* (13.2, C). Příštím krokem je považovat paralelní hrany jako jednu hranu s váhou k . Je zřejmé, že hrana nemusí být vážená celými čísly, avšak lze použít jakéhokoliv váhy w_{ij} . Z výpočtů se objeví i grafy s imaginárními hranami.

Je také možné zmenšit grafy seskupením množiny vrcholů do nového vrcholu a ponecháním pouze hran spojujících novou množinu vrcholů (obr. 13.4). Tato operace zjednodušuje graf.

Oba prvky grafů mohou být indexované (označené) a neindexované (neoznačené). Obvykle se uvažují pouze vrcholově označené grafy. Označené grafy jsou někdy pouze částečně indexovány grafy, když pouze některé jejich vrcholy jsou indexovány, nebo rovnocenně, několik vrcholů má stejné indexy. Když jeden vrchol je speciálně označený, mluvíme o *kořenu*.

Zvláštní označení grafů je jejich barvení. Lze formulovat úlohu obarvit vrcholy takovým způsobem, aby žádné incidentní vrcholy neměly stejnou barvu. Počet barev ukazuje části grafu, kde všechny vrcholy jsou nespojitě. Neexistuje mezi nimi žádná hrana. Nejmenší počet barev, které jsou nutné k obarvení spo-

Figure 13.5: Rozhodovací strom. Levá větev znamená 1, pravá větev znamená 0. Kořen se bere jako decimální čárka a následná rozhodnutí modelují více hodnotovou logiku



jitěho grafu je 2. Potom mluvíme o *dvojdílném grafu*. Pro obarvení rovinných grafů (map), jejichž hrany se neprotínají, potřebujeme alespoň čtyři barvy.

Dvojdílné grafy mají důležitou vlastnost, jejich incidenční matice se mohou rozdělit do dvou bloků a jejich kvadratické formy se štěpí do dvou oddělených bloků.

Grafy jsou *spojené*, pokud existuje alespoň jedna cesta nebo procházka mezi všemi páry vrcholů. Je nepřetržitá řada hran spojujících daný pár vrcholů. Vzájemně nespojené části grafu jsou známy jako jeho *složky*. Alespoň $(n - 1)$ řádek je potřeba ke spojení všech n vrcholů grafu a n hran ke vzniku cyklu. Spojité grafy s $(n - 1)$ hranami jsou známy jako *stromy* (??, A) a jsou acyklické. Graf tvořený více stromy je *les*.

Můžeme nalézt *střed* grafu, určený jako jeho nejvnitřnější vrchol, nebo *průměr* grafu, jako kdyby grafy byly nějakými pevnými objekty. Avšak zde se objevují některé potíže. Když definujeme střed grafu jako vrchol, který má stejnou vzdálenost od nejvzdálenějších vrcholů, potom v lineárních řetězcích se sudým počtem vrcholů, například v lineárním řetězci L_6



máme dva kandidáty pro nominaci. Je lepší mluvit o *centroidu* nebo o *centrální hraně*. Některé grafy nemají vůbec žádný střed.

Zavádět všechny pojmy teorie grafů postupně v krátkém přehledu je vyčerpávající. Avšak je nutné znát některé pojmy.

Lineární řetězce L_n jsou zvláštní třídou stromů, jejichž všechny vrcholy vyjma dvou koncových mají stupeň $v_j = 2$. Stupeň vrcholu počítá hrany incidentní k vrcholu. Lineární řetězce mají nejdelší vzdálenost mezi svými krajními vrcholy a největší průměry ze všech grafů. Jiné krajní stromy jsou *hvězdy* S_n . Všechny $(n - 1)$ jejich vrcholů je spojeno přímo s centrálním vrcholem. Průměr hvězdy je vždy 2. *Rozhodovací stromy* jsou stromy s jedním vrcholem stupně 2 a všemi jinými vrcholy se stupni 3 nebo 1. Pokud se vrchol stupně 2 vybere jako kořen (obr. ??), potom na procházce je nutné provádět na každém kroku binární rozhodnutí, na kterou stranu jít. Vrcholy se stupni 1 jsou známy jako *listy*. Jsou spojené *větvemi* ke *kmeni* stromu. Už známe rozhodovací stromy jako řady v jednotkových krychlích. Ve stromu jsou spojující do rozvětřující se větví. Indexování listů je známo jako binární kódování.

Úplný graf K_n má $n(n-1)/2$ hran, které spojují vzájemně všechny jeho vrcholy. Jeho průměr je 1 a nemá žádný střed. *Doplňkový* \overline{G} graf G je definován jako množina hran grafu G chybějící v úplném grafu K_n na stejných vrcholech, nebo součtem

$$K_n = G + \overline{G}. \quad (13.3)$$

Z toho plyne, že doplňkový graf doplňkového grafu $\overline{\overline{G}}$ je výchozí graf G a, že doplňkový graf $\overline{K_n}$ úplného grafu K_n je prázdný graf G_n se žádnou hranou.

13.3 Petrieovy matice

Orientované hran orientovaných grafy byly definovány jako rozdíly dvou jednotkových vektorů ($\mathbf{e}_j - \mathbf{e}_i$). Jinou možností je mapování orientovaných a neorientovaných hran na matice s jednotkovými prvky.

Orientovaná hrana se ztotožní přímo s jednotkovým vektorem (\mathbf{e}_j nebo s kontinuální řadou jednotkových vektorů \mathbf{e}_j). Takové matice jsou známy jako *Petrieovy matice*¹ \mathbf{P}_e .

Petrieovy matice jsou ekvivalentní k incidenčním maticím. řádka obsahující kontinuální řadu jednotkových symbolů odpovídá každé orientované hraně incidenční matici bez přerušení. řada jednotkových symbolů v Petrieově matici \mathbf{P}_e jdoucí od i k $(p-1)$ odpovídá orientované hraně mezi vrcholy i a p . Orientovaná hrana 1-2 je představena v Petrieově matici jedním jednotkovým symbolem, orientovaná hrana 1-6 vyžaduje 5 jednotkových symbolů.

Kanonické tvary \mathbf{P}_e a \mathbf{S} pro K_4 jsou

$$\begin{array}{cc} \mathbf{P}_e & \mathbf{S} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right). \end{array}$$

Petrieovy matice mají dvě důležité vlastnosti:

1. Petrieova matice \mathbf{P}_e grafu G násobená incidenční maticí \mathbf{S} lineárního řetězce L dává incidenční matici daného grafu:

$$\mathbf{S}(G) = \mathbf{P}_e(G)\mathbf{S}(L). \quad (13.4)$$

Z následných jednotek v řádce Petrieovy matice pouze první a poslední se mapují v součinu, všechny mezilehlé páry jsou zničeny následnými páry jednotkových symbolů s opačnými znaménky z incidenční matice lineárního řetězce, jehož vrcholy jsou indexovány postupně: $1 - 2 - 3 - \dots - n$. Například

¹Nemáme dost jednoduchých symbolů pro všechny rozdílné matice.

$$\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \mathbf{C}^{-1} \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{array}.$$

Permutace sloupců je (3,1,4,2). řádka s jednotkovým prvkem je vložena do incidenční matice jako druhá a všechny orientované hrany jdou od vrcholu 2.

Už jsme použili kódovou matici lineárního řetězce L_n a její inverzi jako operátory \mathbf{T}^T a \mathbf{C}^{-1} v podkapitole 4.3. Připomeňte si, že

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 0 \\ & & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1. \end{array}$$

Když si to prohlédneme, vidíme, že \mathbf{C}^{-1} je incidenční matice lineárního řetězce L_4 , jehož singularita byla odstraněna přičtením řádky s jedním jednotkovým prvkem 1_{11} . Pro takové zakořeněné incidenční matice budeme používat symbol hvězdičky \mathbf{S}^* . Podobně lze upravit incidenční matice všech stromů. Kódové matice \mathbf{C} jsou jen jejich inverze $(\mathbf{S}^*)^{-1}$.

Zdá se, že odlišnost mezi Petrieovými maticemi $\mathbf{P}e$ a kódovými maticemi \mathbf{C} je způsobena jednotkovým sloupcem \mathbf{J} , který transformuje $(n-1)$ čtvercovou matici na n rozměrnou čtvercovou matici. Avšak obě množiny jsou rozdílné.

Incidenční matice stromů \mathbf{G}^* zakořeněné jednotkovým sloupcem \mathbf{J} jsou nesingulární a mají inverze \mathbf{G}^{-1} , které jsou opět kódovými maticemi \mathbf{C} neorientovaných stromů. Tyto kódové matice \mathbf{C} musí obsahovat záporné prvky.

Například pro hvězdu dostaneme s použitím principu inkluze a exkluze

$$\begin{array}{cccc|cccc} & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1. \end{array}$$

Incidenční matice neorientovaných hvězd \mathbf{S}^* a orientovaných hvězd \mathbf{G}^* jsou vzájemnými inverzemi.

Chapter 14

Enumerace grafů

14.1 Úvod

Zabývali jsme se podrobně enumeracemi naivních matic \mathbf{N} . Spočítat jejich součty a rozdíly, známé jako neorientované a Orientované grafy, je složitější problém. Tedy pouze některé problémy enumerace grafů budou diskutovány.

14.2 Enumerace stromů

Acyklické spojené grafy, známé jako stromy, tvoří základnu prostoru grafů. Vysvětlíme později proč, nyní pouze ukážeme, jak složitá je enumerace grafů ve srovnání s naivními maticemi.

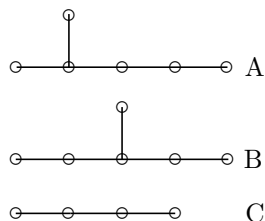
Každý strom, jehož vrcholy jsou označené, s řadou symbolů s použitím Prüferova algoritmu: Vybereme koncový vrchol s nejnižším indexem, označíme jeho souseda a odřezeme jej od stromu (jeho větev se odsekne a vyhodí). Toto ořezávání se opakuje, až z původního stromu zůstane pouze $K_2 = L_2$. Takovým způsobem dostaneme řadu $(n - 2)$ symbolů. Pokud všech n vrcholů původního stromu mělo zvláštní označení, potom zřejmě existuje n^{n-2} řad odpovídajících všem možným označením stromů. Například: L_5 1-5-4-3-2 dává 5,3,4, L_5 2-1-4-3-5 dává 1,4,3. Sekvence 4,4,4 se získá ořezáváním hvězdy S_5 zakořeněné v 4.

Tyto řady se mohou spočítat modifikovanou rovnicí 10.2. Strom má $(n - 1)$ hran a součet stupňů vrcholů v_j je $\sum v_j = 2(n - 1)$. Nejmenší možný stupeň koncových vrcholů je 1. n vrcholových stupňů je vázaných, tedy ve stromech pouze $(n - 2)$ jednotek lze rozdělit. Proto dostaneme

$$\text{Počet stromů} = n^{n-2} = \sum_k (n! / \prod_k n_k!) ([n - 2]! / \prod_k (v_k - 1)^{n_k}) . \quad (14.1)$$

Součet se provede přes všechna rozdělení $(n - 2)$ do n částí a v_k nahrazuje m_k .

Figure 14.1: Nejmenší pár grafů na stejné orbitě rozdělení (A a B) a graf s centrální hranou (C)



Rovnice 14.1 počítá stromy úspěšně, avšak objevuje se jedna nevýhoda: Různé typy stromů se počítají dohromady, když mají stejnou strukturu rozdělení. Orbity rozdělení se štěpí v grafech do podorbit. Nejmenší pár stromů takovým způsobem rozštěpený na dva rozdílné stromy na orbitě 322111 je na obrázku 14.1.

Orbity rozdělení se štěpí do grafových orbit s rozdílnou strukturou. Podobné vrcholy grafů jsou známé jako *orbity grafu*. Toto použití jednoho pojmu na rozdílných úrovních je poněkud zavádějící¹.

Strom A na obr. 14.1 má 5 rozdílných orbit a B pouze 4. Počet rozdílných hran spojujících vrcholy na rozdílných orbitách je menší, než počet vrcholových orbit, vyjma symetrických hran spojujících vrcholy na stejných orbitách, jako je centrální hrana v C na obr. 14.1.

Musíme vysvětlit, proč orbity rozdělení jsou důležité, a nalézt techniky jak spočítat počet neoznačených stromů. Dříve však zmíníme jiné dva problémy spojené s označováním stromů.

Stromy, podobně jako jiné grafy, lze vztyčit ze stromů nižších rozměrů. Pokud použijeme techniku Youngových tabulek, což je vepisování indexů do Ferrersových grafů, dostaneme Youngem označené stromy. Když se vychází z K_2 , existuje vždy $(n-1)$ příležitostí jak připojit n -tý vrchol k $(n-1)$ vrcholům stromů nižší hladiny a počet Youngem označených stromů musí být $(n-1)!$. Tyto stromy lze srovnávat s konvolucemi.

Všechny stromy jsou vytvořeny polynomiálem

$$x(x+m)^{m-1} \quad (14.2)$$

kde m je počet hran ve stromu s $(m+1)$ vrcholy. Mocniny x lze interpretovat jako počet hran spojených s přidaným vrcholem tvořícím kořen a členy polynomiálu při x^k lze interpretovat jako počet stromů zakořeněných v n -tém vrcholu majícím odpovídající stupeň vrcholu k . Například pro $m = 4$ dostaneme:

¹Slunce má své planety a planety opět mají své trabynty všechny se svými vlastními orbitami.

Table 14.1: Stromy vytvořené polynomiálem $x^5 - 6x^4 + 12x^3 - 6x^2 + x$ a inverzní matice

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-----|-----|-----|-----|----|---|----------|----|-----|-----|-----|---|
| m=1 | 1 | | | | | 1 | 1 | | | | |
| 2 | 2 | 1 | | | | 3 | -2 | 1 | | | |
| 3 | 9 | 6 | 1 | | | 16 | 3 | -6 | 1 | | |
| 4 | 64 | 48 | 12 | 1 | | 125 | -4 | 24 | -12 | 1 | |
| 5 | 625 | 500 | 150 | 20 | 1 | 1296 | 5 | -80 | 90 | -20 | 1 |

$$64x^1 + 48x^2 + 12x^3 + 1x^4 = 125.$$

16 stromů se 4 vrcholy jsou připojené k pátému vrcholu na 4 rozdílných místech. To dává první koeficient. Druhý koeficient se získá zakořeněním $(L_3 + K_1) = 3 \times 12$ a $2K_2 = 3 \times 4$. Poslední člen odpovídá hvězdě zakořeněné v pátém vrcholu.

Tak jsme dostali novou kombinatorickou identitu, kterou lze zobrazit v tabulkové formě v tabulce 14.1 dohromady s její inverzní maticí

Prvky inverzní matice se mohou rozložit do binomiálních koeficientů $\binom{m}{j}$ a prvků $-j^{(i-j)}$. Příští řádka inverzní matice je $-6 \times 1 + 15 \times 16 - 20 \times 27 + 15 \times 16 - 6 \times 5 + 1 \times 1$.

Pro indexování neoznačených stromů je nutné nalézt počet orbit zakořeněných stromů a počet zakořeněných stromů se symetrickými hranami.

14.3 Grupa symetrie neorientovaných grafů

Incidenční matice \mathbf{G} úplného neorientovaného grafu K_n má n sloupců a $n(n-1)/2$ řádek. V každém sloupci existuje $(n-1)$ jednotkových prvků a v každé řádce existují dva jednotkové prvky. Různé kombinace párů jednotkových vektorů odpovídají rozdílným hranám grafu a lze indexované postupně indexem i , jdoucím od 1 až k $n(n-1)/2$.

Incidenční matici \mathbf{G} lze permutovat zleva permutačními maticemi $\mathbf{P}_{n(n-1)/2}$ tvořícími grupu cyklických permutací $S_{n(n-1)/2}$ a zprava permutačními maticemi \mathbf{P}_n . Tyto permutace n sloupců tvoří grupu S_n cyklických permutací, která mění permutace větší levostranné grupy $S_{n(n-1)/2}$. Tato grupa grafových hran nemůže být úplná, protože je indukovaná menší cyklickou grupou S_n . Použijeme pro grafovou grupu indukovanou permutacemi sloupců incidenční matice \mathbf{G}_n jednoduchou notaci G_n . V matematické literatuře se používají rozdílná jména, jako "věncový součin" nebo "kroková grupa".

V tabulce 14.2 jsou ukázané účinky cyklických permutací na incidenční matici úplného grafu K_n .

Indexování hran grafu se provádí rekurzivně. Ke grafu s n hranami se přidává nový vrchol a k incidenční matici \mathbf{G}_n nový blok mající blokový tvar

Table 14.2: Vztahy mezi S_n a G_n grupami

| S_n grupa | | s_1^4 | $s_1^2 s_2^1$ | $s_1^1 s_3^1$ | s_2^2 | s_4^1 |
|-----------------|--------------------------------------|--|--|--|--|--|
| P | | 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 | 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 | 0 1 0 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 0 0 1 | 0 1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 | 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 0 0 0 |
| Počáteční řádka | G _{K_4} | Permutované hrany (index původní řádky) | | | | |
| 1 | 1 1 0 0 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 2 | 1 0 1 0 | 2 | 3 | 3 | 5 | 4 |
| 3 | 0 1 1 0 | 3 | 2 | 1 | 4 | 3 |
| 4 | 1 0 0 1 | 4 | 4 | 6 | 3 | 6 |
| 5 | 0 1 0 1 | 5 | 6 | 4 | 2 | 5 |
| 6 | 0 0 1 1 | 6 | 5 | 5 | 6 | 1 |
| G_4 grupy | | s_1^6 | $s_1^2 s_2^2$ | s_3^2 | $s_1^2 s_2^2$ | $s_2^1 s_4^1$ |

dvou jednotkových matic ($\mathbf{I}_n | \mathbf{J}_n$). Podgrupa $s_1^1 S_n$ grupy S_{n-1} , která nechává poslední sloupec na svém místě, permutuje pouze prvky matice \mathbf{G} , avšak její účinek transformuje jednotkový cyklus s_1 s jedním prvkem do n prvků působící permutační matice a transformuje její cyklickou strukturu, což přidává nové cykly k existující struktuře grafové grupy.

Ovšem grupa S_{n+1} obsahuje také jiného podgrupy než $s_1^1 S_n$. Jednou z nich je podgrupa jednoduchých cyklů s_{n+1} . Každý cyklus s lichou délkou k transformuje $(n+1)$ -tý jednotkový cyklus do nového cyklu stejné délky. V našem příkladě ($s_1^1 + s_1^3$) se transformuje do

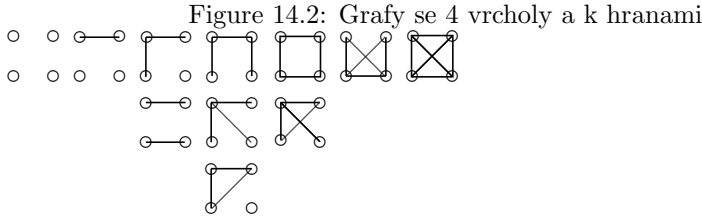
$$(s_1^3 + s_1^3) = s_1^6 \text{ a } (s_1^1 + s_3^1) \text{ do } (s_3^1 + s_3^1) = s_3^2. \quad (14.3)$$

Cykly sudé délky transformují přidaný jednotkový cyklus do dvou cyklů, jednoho majícího stejnou délku jako původní cyklus a druhého s poloviční délkou. Pro tento případ máme v našem příkladě cykly délky 2:

$$[s_1^1 + (s_1^1 s_2^1)] = (s_1^1 + s_1^1 s_2^1) = s_1^2 s_2^2.$$

Ve skutečnosti každý prvek cyklu délky n působí na $(n-1)/2$ indukovaných prvků grupy G_n . Pokud n je liché, $(n-1)/2$ je celé číslo, pokud n je sudé, zbývá $n/2$ hran, které se permutují a tvoří nový cyklus. V našem příkladě s_4 generovalo nový cyklus s_2 , protože úplný graf K_4 má 6 hran. V K_6 s 15 hranami s_6 vytváří cyklickou strukturu $s_4^1 s_6^2$.

Když existují dva cykly rozdílných délek, které nemají společný dělitel, vytváří tolik cyklů, jakou má jejich společný dělitel délku, délky rovnající se jejich nejmenšímu násobku. Například při $n = 5 : 2 \times 3 = 6$ a zbývají 4 prvky, aby se permutovaly s menšími cykly. To je možné jako $s_1^1 s_3^1$. Cyklus s_1 je indukován cyklem s_2 , který permutuje dva vektory pouze s jednou hranou a zanechává identitu. Cyklus s_3 permutuje jen sloupce tří hran a jen se



reprodukuje. Některé příklady podgrup $S(n)$ a odpovídající indukované grafové cykly

$$S_6 = s_6^1; \quad S_7 = s_1^1 s_6^1; \quad S_8 = s_2^1 s_6^1;$$

$$G_6 = s_3 s_6^2; \quad G_7 = s_3 s_6^3; \quad G = s_1^1 s_3^1 s_6^4.$$

Je možné vytvořit jakoukoliv grafovou grupu buď počítáním výsledků násobení incidenčních matic rozdílnými permutačními maticemi, nebo dedukcí účinků rozdílných cyklických struktur. Oba způsoby jsou zdlouhavé práce vyžadující trpělivost anebo počítač. Pokud si uvědomíme, že se jedná jen o součty pouze dvou naivních matic, kde se všechny operace zdály snadné, musíme se divit, jak složité musí být grupy matic majících v každé řádce tři nebo více jednotkových symbolů, nebo grupy matic rozdílných druhů.

Grafové grupy G_n se mohou použít pro určení počtu všech jednoduchých grafů s n vrcholy, podobně jako se použily cyklické indexy. Hrana může být přítomná v grafu nebo ne. V jednoduchém grafu nejsou dovolené násobné hrany a můžeme si představit, že grafy jsou umístěny na vrcholy $n(n-1)/2$ rozměrné jednotkové krychle, jejíž strany jsou tvořeny diagonálami jako na obrázku 12.1, kde jsou ukázané dvě diagonální řady v 3 rozměrné krychli.

Abychom představili obě možnosti, vložíme do cyklických indexů polynomiálu $(1+x^k)$ cykly s_k a vypočteme pro všechny podgrupy. G_4 grafový index je

$$G_4 = 1/24 (s_1^6 + 9s_1^2 s_2^2 + 8s_3^2 + 6s_2^1 s_4^1). \quad (14.4)$$

To dává

$$Z(G_4, 1+x) = 1 + x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + x^5 + x^6 \quad (14.5)$$

kde koeficienty při x^k určují počet rozdílných grafů se 4 vrcholy a k hranami. Jsou ukázané na obr. 14.2.

14.4 Symetrie neorientovaných grafů

Vysvětlili jsme grafové grupy permutacemi sloupců incidenční matice \mathbf{G} úplného grafu. Nyní použijeme tuto techniku a vysvětlíme symetrii jiných neorientovaných grafů, které jsou podstatně podmnožinou k prvků úplného grafu.

Jsou pouze dvě možnosti, co permutace sloupců incidenční matice mohou provést s hranami. řádku lze permutovat samu se sebou nebo se může změnit v řádku odpovídající jiné hraně. Grupa jediné hrany má dva prvky: $(1)(2)$ a (12) . Pokud je hrana definována na množině 4 vrcholů, potom existují 4 permutace, které ji nechávají nezměněnou: $(1)(2)(3)(4)$, $(1)(2)(34)$, $(12)(3)(4)$, a $(12)(34)$. Můžeme vybrat 6 rozdílných hran, avšak některé budou mít stejné grupy, jako hrana 3-4 s hranou 1-2.

S k řádky máme vždy tři možnosti: Permutace působící na vrcholy mění pouze pořadí hran, to znamená jejich indexování. Nebo mění je úplně (nebo alespoň částečně) do řádků odpovídajících jiným hranám. Výsledkem je, že jeden označený graf je změnil v jiný označený graf, který musí mít stejný počet hran a musí náležet ke stejnému typu grafu.

Počet b permutací, které pouze permutují hrany incidenční matice \mathbf{G} grafu určuje symetrii grafu. Když podělíme počet všech permutací $n!$ číslem symetrie b , dostaneme počet rozdílně označených grafů daného typu. b jednoduchých hran na 4 vrcholech je 4 a existuje opravdu $24/4 = 6$ rozdílných hran na množině 4 vrcholů. Číslo symetrie tohoto grafu K_4 je 24, tedy existuje pouze jedno rozlišitelné označení tohoto grafu. Vztah počtu b rozlišitelných označení je známé jako *Burnsidova lemma*.

Nyní prozkoumáme výpočty podle (14.3). Vzorec

$$(1+x)^6 + 9(1+x)^2(1+x^2)^2 + 8(1+x^3)^2 + 6(1+x^2)(1+x^4) \quad (14.6)$$

se rozdělí podle svých členů do konečného výsledku jako:

| Mocniny x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---------------|----|----|----|----|----|----|----|
| s_1^6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |
| $9s_1^2s_2^2$ | 9 | 18 | 27 | 36 | 27 | 18 | 9 |
| $8s_3^2$ | 8 | | | 16 | | | 8 |
| $6s_2^1s_4^1$ | 6 | | 6 | | 6 | | 6 |
| Σ | 24 | 24 | 48 | 72 | 48 | 24 | 24 |
| Počet grafů | 1 | 1 | 2 | 3 | 2 | 1 | 1 |

Všechny permutační matice grupy S_4 transformují prázdný nebo úplný graf na sebe. Tedy jejich $b = 24$. Když podělíme sloupcové součty 24, dostaneme počet rozdílných grafů s k vrcholy. Počet rozlišitelných označených grafů je daný v první řádce, kde se počítají identitní permutace. Pro jedinou hranu to dává šest rozdílných grafů. Číslo b je vytvořené třemi permutacemi hran typu $s_1^2s_2^2$ a jednou permutací s_1^6 .

U grafů s dvěma hranami, 15, 27 a 6 permutací náleží dvěma rozdílným grafům, buď L_3 a jeden izolovaný vrchol nebo dvě L_2 . Když se pokoušíme dělit permutace do orbit grafu, můžeme použít fakt, že jak b tak počet rozdílných označení grafu musí být děliteli $n!$. 15 se může potom štěpit pouze jako $12 + 3$. Potom 27 se může rozdělit jako $12 + 12 + 3$. Můžeme použít také jiné kritérium a rozhodnout, která z obou možností je správná. Využijeme možná rozdělení vrcholových stupňů. Grafy s dvěma hranami mají součet vrcholových

stupňů 4 a pro 4 vrcholy dvě rozdělení: 2110 a 1111. Existuje 12 rozlišitelných permutací prvního rozdělení a pouze 1 permutace druhého. Toto rozdělení je stále u všech permutací, včetně cyklu délky 4, tedy struktura grupy je s_4^1 . Obě kritéria nechávají jako jediné možné štěpení 12+12+3. Existuje 12řů lineárních etězců L_4 s $b = 2$ a struktúrou grupy $(s_1^4 + s_2^2)$ a 3 grafy $2K_2$ s $b = 8$. Jejicháá struktura grupy je $s_1^4 + 2s_2^2s_1^1 + 3s_2^2z_2 + 2s_4^1$. Grafy s pěti a ššesti hranami jsou komplementární grafy s žádnou a jedou hranou.

14.5 Orientované grafy

V jednoduchém orientovaném grafu mohou existovat dvě orientované hrany mezi každým párem vrcholů. Symetrie orientovaných grafů tento fakt komplikuje. To lze dokumentovat na vztahu mezi počtem samo se doplňujících neorientovaných grafů s $4k$ vrcholy a počtem samo se doplňujících turnajů s $2k$ vrcholy. A *turnaj* je spojený orientovaný graf, který může mít pouze jednu z obou orientací orientovaných hran.

Úplný turnaj s $2k$ vrcholy má $(4k^2 - 2k)$ orientovaných hran, úplný orientovaný graf s $4k$ vrcholy má $(8k^2 - 2k)$ orientovaných hran. Je nutné k doplnění grafu odpovídajícího samo se doplňujícímu turnaji s $2k$ vrcholy vytvořit z každé orientované hrany dvě orientované hrany. To lze provést následovně: Vytvoříme $2k$ nových vrcholů indexovaných čárkovanými indexy turnaj a spojíme všechny liché čárkované a nečárkované vrcholy mající stejný index k orientovanými hranami. Pokud v turnaji existuje orientovaná hrana $i-j$, vytvoříme orientované hrany $i-j$ a $i-j'$ v doplňkovém grafu, pokud existuje orientovaná hrana $j-i$, zavedeme orientované hrany $i'-j$ a $i'-j'$. Orientované hrany chybějící v indukovaném grafu jsou přítomné v samo se doplňujícím grafu odpovídají orientovaným hranám v Doplňkovém turnaji nebo spojují sudé čárkované a nečárkované vrcholy. Rozdíl je tvoen $4k^2$ orientovanými hranami a $2k$ vrcholy.

Rozdíl mezi orientovanými a neorientovanými grafy lze vysvětlit také jiným způsobem. Můžeme použít dvě zvláštní hrany pro obě orientace orientovaných hran $i-j$ a $j-i$. V jednoduchém orientovaném grafu může být $n(n-1)$ orientovaných hran, to je dvojnásobek počtu hran. Incidenční matice \mathbf{S} má dvojnásobek počtu řádků incidenční matice \mathbf{G} a permutace jejích sloupců vytváří jiný druh permutací sloupců záměnou znaménka. Permutace $(12)(3)(4)$ vytváří grafové permutace $(12)(23)(45)(6)(89)(10,11)(12)$, což nechává nezměněné pouze dvě hrany.

Už jsme se zmínili, že počet označených neorientovaných grafů je $2^{n(n-1)/2}$. To lze napsat jako polynomiál

$$G(t) = (1+t)^{\binom{n}{2}} \text{ s } t = 1. \quad (14.7)$$

Tento fakt je vyvozen z možnosti, jak zaplnit matici sousedství \mathbf{A} jednotkovými symboly. Existuje $\binom{n}{2}$ možností, které jsou nezávislé. Matice sousedství je symetrická. Zaplňují se současně dolní a horní mimodiagonální polohy. Polynomiál $G(2)$ dává počet označených orientovaných grafů s pouze jednou orientovanou hranou mezi párem vrcholů. Toto odpovídá matici sousedství, která má pouze jeden prvek v každém páru poloh $i-j$ a $j-i$ ukazující orientaci

orientované hrany. Polynomiál $G(3)$ dává počet orientovaných grafů s oběma orientacemi orientovaných hran, nebo počtu asymetrických matic sousedství, které mohou mít pár jednotkových symbolů v každém páru odpovídajících míst.

14.6 Spojité neorientované grafy

Graf je spojitý, pokud má pouze jednu složku. Počet neorientovaných spojitých grafů lze určit, pokud počítáme všechny grafy zakořeněné v jedné složce C_k s k vrcholy. Jejich počet je rovný počtu všech zakořeněných označených grafů

$$n2^{n(n-1)/2} = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} C_k G_{n-k} \quad (14.8)$$

kde G_{n-k} je počet všech zakořeněných grafů s $(n-k)$ vrcholy, což znamená $n2^{(n-k)(n-k-1)/2}$ s $G_0 = 1$. Význam levé strany identity je jasný: Každý graf má n možných kořenů. Pravá strana počítá každý graf podle počtu jeho složek. Pokud má dvě složky, potom se počítá dvakrát, jednou s k kořeny, potom s $(n-k)$ kořeny. Prázdný graf se počítá n krát v důsledku binomiálního koeficientu na pravé straně.

Když oddělíme počet spojitých grafů C_n , můžeme určit počet všech zakořeněných označených grafů rekurzivně. Zde se použije obecný vztah mezi dvěma vytvářejícími funkcemi, normální a exponenciální. Počty spojitých označených grafů G_n jsou koeficienty exponenciální vytvářející funkce označených grafů

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C^n(x)/n! = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n x^n\right). \quad (14.9)$$

Poněvadž existuje také normální vytvářející funkce označených grafů

$$G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A^n x^n, \quad (14.10)$$

obě funkce lze srovnávat. Vložením $a_0 = 1$, můžeme logaritmovat obě strany s výsledkem

$$a_n = A_n - 1/n \sum_{k=1}^{\infty} k a_k A_{n-k}. \quad (14.11)$$

(14.8) je jen speciálním případem této identity.

Počet spojitých grafů C_n je rychle rostoucí funkce

| na | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|-------|---|---|---|----|-----|-------|
| C_n | 1 | 1 | 4 | 38 | 728 | 26704 |

Chapter 15

Vlastní hodnoty a vlastní vektory

15.1 Interpretace vlastních hodnot

Kvadratická forma naivních matic $\mathbf{N}^T\mathbf{N}$ je diagonální matice. Také čtverce Hadamardových matic jsou diagonální matice. Avšak druhá kvadratická forma naivních matic $\mathbf{N}\mathbf{N}^T$ a kvadratické formy incidenčních matic grafů \mathbf{G} a \mathbf{S} mají mimodiagonální prvky. Interpretovali jsme diagonální a mimodiagonální prvky jako dva ortogonální maticové vektory udávající jednotkové projekce jakéhokoli maticového vektoru \mathbf{M} do prostoru hran a sloupců (viz obr.). V této kapitole ukážeme podmínky, kdy maticový vektor lze reprezentovat ekvivalentní diagonální maticí *vlastních hodnot* zavedených v podkapitole 3.5 a vlastnosti, které takové nahrazení má.

Ve srovnání s naivními maticemi je jasná jedna vlastnost: diagonální matice musí mít stejnou délku jako samotný maticový vektor \mathbf{M} . Z této vlastnosti vyplývá, že při diagonalizaci se maticový vektor \mathbf{M} otáčí, aby se snížila důležitost mimodiagonálních prvků. Alternativně poloha vektoru je stálá a měníme soustavu koordinát, přesně jako kdybychom obcházeli okolo matice až bychom našli místo, odkud je možné vidět skrze matici. Takový výhled má svou vlastní množinu koordinát.

Obcházení matice se podobá funkci polarizujících filtrů otáčejících světlo (množina vlastních hodnot je známá jako *spektrum* matice). Polarizující funkci má pár matic známých jako matice *vlastních vektorů*. Matice \mathbf{M} se vloží mezi pár matic vlastních vektorů \mathbf{Z}^T a \mathbf{Z} a výsledný součin je ekvivalentní diagonální matici $\Delta(\mathbf{M})$:

$$\mathbf{Z}^T\mathbf{M}\mathbf{Z} = \Delta(\mathbf{M}) \quad (15.1)$$

V podkapitole 3.5 se použily symboly \mathbf{L} a \mathbf{R} pro obě diagonalizující matice. Rozdíl mezi těmito maticemi vlastních vektorů je způsoben dalším požadavkem

na vlastní vektory. Vlastní vektory jsou diagonalizující vektory, které jsou normalizovány jako v následujících příkladech

| | | | | |
|--------------|---------------|--|--------------|---------------|
| | | | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ |
| | | | $1/\sqrt{2}$ | $-1/\sqrt{2}$ |
| 0 | 1 | | $1/\sqrt{2}$ | $-1/\sqrt{2}$ |
| 1 | 0 | | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ |
| $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ | | 1 | 0 |
| $1/\sqrt{2}$ | $-1/\sqrt{2}$ | | 0 | -1 |

| | | | | |
|--------------|---------------|--|--------------|---------------|
| | | | $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ |
| | | | $1/\sqrt{2}$ | $-1/\sqrt{2}$ |
| 2 | 1 | | $3/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ |
| 1 | 2 | | $3/\sqrt{2}$ | $-1/\sqrt{2}$ |
| $1/\sqrt{2}$ | $1/\sqrt{2}$ | | 3 | 0 |
| $1/\sqrt{2}$ | $-1/\sqrt{2}$ | | 0 | 1 |

Situace se komplikuje, když je více vlastních hodnot stejných a odpovídající hodnoty jsou násobky.

Všimněte si dvou důležitých vlastností vlastních vektorů matic:

- 1. Jejich sloupcové vektory by měly být ortogonální a normalizované

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{I} \quad (15.2)$$

Například

| | | | | |
|------------|------------|--|------------|-------------|
| | | | $2^{-1/2}$ | $2^{-1/2}$ |
| | | | $2^{-1/2}$ | $-2^{-1/2}$ |
| $2^{-1/2}$ | $2^{-1/2}$ | | 1 | 0 |
| $2^{-1/2}$ | $2^{-1/2}$ | | 0 | 1 |

Někdy se nesnadné nalézt ortogonální vlastní vektory, pokud je stejných více vlastních hodnot (nebo jedna vlastní hodnota je násobná).

- 2. Když vlastní vektory násobí matici \mathbf{M} , všechny její prvky se násobí faktorem odpovídajícím vlastní hodnotě λ_j . Jinými slovy, matice \mathbf{M} se chová k maticím svých vlastních vektorů \mathbf{Z}^T a \mathbf{Z} jako diagonální matice vlastních hodnot

$$\mathbf{M}\mathbf{Z} = \lambda_j \mathbf{Z} \quad (15.3)$$

15.2 Vlastní hodnoty a singulární hodnoty

Všechny shora uvedené rovnice byly napsány pro čtvercové matice \mathbf{M} představující kvadratické formy. U obdélníkových matic můžeme zaplnit jejich chybějící řádky nebo sloupce nulovými prvky a pro jakýkoliv vektor vzatý jako vlastní vektor dostaneme nulovou vlastní hodnotu. Nebudeme se zajímat o vlastní hodnoty pravoúhlých matic, avšak o vlastní hodnoty jsoucích kvadratických forem, které jsou známé jako *singulární hodnoty* pravoúhlých matic a asymetrických čtvercových matic.

Incidenční matice \mathbf{S} stromu je $(n - 1) \times n$ -rozměrná. $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ je n -rozměrná matice, $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ je $(n - 1)$ -rozměrná matice. Obě součiny mají stejné množiny singulárních hodnot. V tomto případě $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ musí mít jednu nulovou λ_j . To platí pro všechny spojitě grafy. Čtverec jednotkové matice $\mathbf{J} \mathbf{J}^T$ má pouze jednu nenulovou vlastní hodnotu, která je identická s vlastní hodnotou $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$. To je součet n jednotek.

Ještě jednou opakujeme důležitý fakt, že na diagonále obou kvadratických forem stejně jako na diagonále čtverců symetrických matic se objevují čtverce prvků m_{ij} . Pokud je matice symetrická, obě kvadratické formy jsou totožné se čtvercem matice $\mathbf{M}^T \mathbf{M} = \mathbf{M}^2$, tedy singulární hodnoty symetrické matice jsou totožné se čtvercem jejich vlastních hodnot.

15.3 Charakteristické polynomiály

Nyní přistoupíme k problému vlastních hodnot z jiného hlediska. Matice a matice jejich vlastních vektorů tvoří soustavu lineární rovnic, jejíž řešení se nalezne, když se odečte postupně diagonální matice vlastních hodnot $\Delta(\lambda)$ od matice \mathbf{M} a výsledná matice se násobí vlastním vektorem \mathbf{z} :

$$(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (15.4)$$

Například matice

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

odpovídá rovnicím

$$(2 - \lambda)x + y = 0$$

$$x + (2 - \lambda)y = 0.$$

Pokud vložíme vlastní vektor $x = 1$, $y = 1$, dostaneme jako řešení $\lambda = 3$, pro $x = 1$, $y = -1$, je vlastní hodnota $\lambda = 1$. Už známe vlastní vektory jinak se řešení musí nalézt s použitím rozdílných metod. Součin rozdílů vlastních hodnot s neznámými x je *charakteristický polynomiál* $P(x)$ matice \mathbf{M} . V daném případě je to $P(x) = x^2 - 4x + 3$. V obecném případě charakteristický polynomiál je

$$P(x) = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j) = x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \dots \pm a_{n-1} x \pm a_n x^0. \quad (15.5)$$

člen a_1 je jen součet všech vlastních hodnot a je identický se stopou matice, poslední člen je součinem všech vlastních hodnot a určuje zda soustava vlastních hodnot má řešení. Tedy se nazývá *determinant*. Pokud matice má alespoň jednu nulovou vlastní hodnotu, potom řešení maticových rovnic je neurčité a matice je *singulární*.

15.4 Permanenty a determinanty

Doposud *permanenty* nebyly definovány a bez nich bychom měli potíže s popisem, jak se získají polynomiály z prvků matice. Předpokládejme, že máme čtvercovou matici, jejíž prvky jsou buď symboly nebo čísla, například

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \left(\begin{array}{ccc} b & c & \\ d & e & f \\ g & h & i \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right). \end{array}$$

permanent $p(\mathbf{M})$ je součet všech součinů všech kombinací všech prvků m_{ij} v řádce i nebo sloupci j s prvky s jinými indexy ve všech jiných sloupcích a řádcích

$$\begin{aligned} p(\mathbf{A}) &= aei + afh + bdi + bfg + cdh + ceg \\ p(\mathbf{B}) &= 110 + 131 + 100 + 131 + 201 + 211 = 8. \end{aligned}$$

Použijeme celou množinu permutační matice \mathbf{P} jako vzorů a napíšeme z matice vybrané prvky jako součiny.

Je jasné, že počet prvků v n -rozměrném permanentu je $n!$. n prvků v každé řádce se násobí s $(n-1)!$ členy předcházejících permanentů. Ve skutečnosti počet řádků a sloupců v matici nemusí být stejný, avšak odpovídající součiny potom obsahují nuly. To je důležité pro definici determinantů.

Dříve než s nimi začneme, ukážeme alespoň jeden výsledek z bohaté teorie permanentů, totiž permanent matice $(\mathbf{J}\mathbf{J}_n^T + k\mathbf{I}_n)$:

- Pokud $k = 0$, máme čtvercovou jednotkovou matici. Všechny $n!$ řad permanentu jsou rovné 1 a jejich součet dává faktoriál $n!$.
- Pokud $k = -1$, potom na hlavní diagonále jsou nuly a všechny řady obsahující alespoň jeden diagonální prvek jsou nulové. Počítáme prvky permanentu jako permutační matice \mathbf{P} bez prvků na hlavní diagonále. Mohli byste si vzpomenout (pokud ne, viz kapitolu 7), že se počítají podle subfaktoriálů z_{i0} , tabulka 7.3. To dává pro matici $(\mathbf{J}\mathbf{J}_n^T - \mathbf{I})$ výsledek $(\mathbf{J}\mathbf{J}_n^T - \mathbf{I}_n) = (r_n - 1)^n$.

- Pokud $k=1$, máme na hlavní diagonále 2 a prvky permanentu obsahující diagonální prvky jsou mocniny 2. Vložením této hodnoty do zobecněného polynomiálu dostaneme $(\mathbf{J}\mathbf{J}_n + \mathbf{I}_n) = (r_n - 1)^n$. To je Appleův polynomiál.
- Podobně se naleznou permanenty pro jakékoliv k .

Determinant $\text{Det}(\mathbf{M})$ je v určitém smyslu inverzní funkcí permanentu, protože je založen na principu inkluze a exkluze. Má identické prvky jako permanent, pouze jejich znaménka jsou buď kladná nebo záporná v závislosti na znaménku vytvořující permutace, to je na počtu inverzí. Pro naše příklady to je

$$\text{Det}(A) = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

$$\text{Det}(B) = 0 - 3 - 0 + 3 + 0 - 2 = -2.$$

Pro $n = 2$ je determinant $\text{Det}(\mathbf{M}) = ad - bc$. Pro $n = 3$, determinant se snadno nalezne, pokud opakujeme první 2 řádky matice jako její 4-tou a 5-tou řádku a napíšeme diagonální součiny vlevo a vpravo

$$\begin{array}{c|cc|c} (-) & & b & c & (+) \\ & d & e & f & \\ ceg & g & h & i & aei \\ \hline fah & & b & c & dhc \\ ibd & d & e & f & gbf \end{array}$$

Nalezení determinantů matic vyšších řádů bývalo pracnou úlohou. Byla formalizována definicí *minorů* A_{ij} prvků matice m_{ij} . Minor A_{ij} je determinant matice $\delta_{ij}\mathbf{M}$, získané z matice \mathbf{M} vynecháním j -tého sloupce a i -té řádky. Determinant se pak definoval jako součet součinů všech prvků řádky nebo sloupce s jejich minory

$$\text{Det}(\mathbf{M}) = \sum_{i=1}^m m_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n m_{ij} A_{ij} \quad (15.6)$$

Determinanty se snadno naleznou pouze u některých typů matic.

Je zřejmé, že determinant diagonální matice je součinem jejích prvků, zatím co stopa je jejich součtem. Poněvadž prvky diagonální matice jsou současně jejími vlastními hodnotami, determinant je součinem vlastních hodnot matice

$$\text{Det}(\mathbf{M}) = \prod_{j=1}^n \lambda_j. \quad (15.7)$$

To platí pro jakoukoliv matici a tento fakt dává jinou definici determinantu jako objemu rovnoběžníku tvořeného vlastními hodnotami. Pokud jedna vlastní hodnota je nulová, obdélník netvoří těleso v n -rozměrném prostoru a jeho objem je nulový.

Polynomiál je součinem rozdílů diagonální matice neznámých x se samotnou maticí \mathbf{M} . Počítá se podobně jako determinant, pouze rozdíly se nechávají neotevřené. Determinant je posledním členem a_n polynomiálu, když je x^0 .

Jinak: Pokud matice obsahuje neznámá x na diagonále, nemůžeme vypočítat její determinant v uzavřené formě jako číslo. Výsledkem je polynomiál. Například matice

\mathbf{M}

$$\begin{pmatrix} x & b \\ & x & c \\ b & c & x \end{pmatrix}$$

dává determinant

$$\text{Det}\mathbf{M} = x^3 + 0x^2 - (a + b + c)x^1 + 2abcx^0$$

Determinanty symetrických matic s nulami na diagonále se dělí podle mocniny x podle počtu přemístění a získané počty jsou identické s prvky charakteristického polynomiálu.

Také u trojúhelníkových matic v dolním nebo horním trojúhelníkovém tvaru je determinant součinem jejich diagonálních prvků. Rozložíme determinant podle prvků první řádky. Zde bude pouze jeden nenulový prvek $m_{11}A_{11}$. Potom podobně rozložíme minor A_{11} . Pro výpočet determinantů jsou důležité dvě pravidla:

- 1. Záměna pořadí hran nebo sloupců nemění hodnotu determinantu, avšak může změnit jeho znaménko. Permanent není závislý na pořadí sloupců a hran a znaménko lze změnit, pokud nová permutace hran nebo sloupců změní znaménko členů determinantu.
- 2. Determinant se nezmění, když přidáme nebo odečteme k nějaké řádce (nebo sloupci) matice násobek řádky (nebo sloupce) matice. Pokud přidáme v příkladě shora k druhé řádce prvou řádku a zkontrolujeme všechny členy, vidíme, že co se objeví na jedné straně determinantu, to se objeví také na druhé straně v součinech se zápornými znaménky a všechny změny se samy eliminují a hodnota determinantu zůstane nezměněná.

Obě pravidla se využívají pro výpočet determinantu. Například ukážeme, jak se nalezne determinant matice $(\mathbf{J}\mathbf{J}_3^T - \mathbf{I}_3)$:

0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1

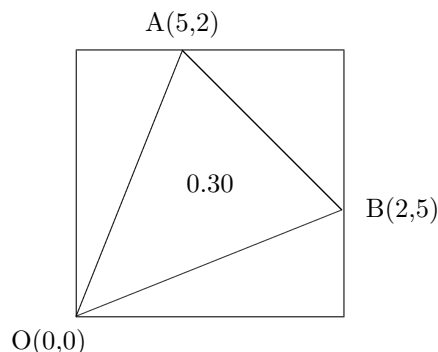
2

3

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- 1. Součet druhé a třetí řádky 2,1,1 se přidal k první řádce.

Figure 15.1: Interpretace determinantu



- 2. První sloupec byl odečten od posledního.
- 3. První sloupec byl odečten od druhého.

n rozměrná matice $(\mathbf{J}\mathbf{J}_3^T - \mathbf{I})$ transformovaná těmito třemi kroky do dolní trojúhelníkové formy má na diagonále jednu hodnotu $(n-1)$ a $(n-1)$ hodnot -1 . Větší matice vyžadují více kroků.

Nyní determinanty naleznou obvykle počítače. Avšak k získání náhledu je dobré znát principy, které tvoří základnu použitých algoritmů.

Determinant lze interpretovat jako $1/n!$ část objemu n -rozměrného tělesa opsaného maticí společně s počátečním bodem koordinát. Například dva body $A(5, 2)$ a $B(2, 5)$ tvoří s $O(0, 0)$ trojúhelník, viz obr. 15.1

Plocha trojúhelníku je $25 - 10 - 4.5 = 10,5$. Determinant matice

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$$

je $25 - 4 = 21$. Polovina je 10.5.

15.5 Polynomiály grafů

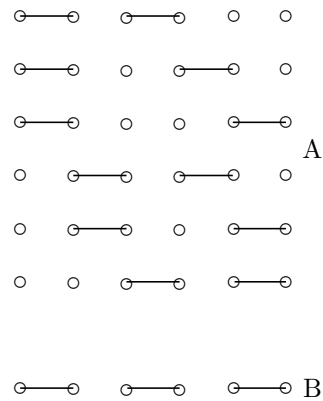
Matice sousedství \mathbf{A} jednoduchých grafů bez smyček mají všechny mimodiagonální prvky buď 1 nebo 0, všechny diagonální prvky jsou nulové a matice jsou symetrické $a_{ij} = a_{ji}$. Pokud se pokoušíme nalézt jejich polynomiály shora popsanou metodou, najdeme pro 3 vrcholy

$$\text{Jeden mimodiagonální prvek } P(\mathbf{A}) = x^3 - x^1 = \prod_{j=1}^3 (x - \lambda_j) \quad (15.8)$$

$$\text{Dva mimodiagonální prvky } P(\mathbf{A}) = x^3 - 2x^1. \quad (15.9)$$

Table 15.1: Polynomiální koeficienty lineárních řetězců L_n

| k | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----|----|----|----|----|----|---|---|
| m=0 | 1 | | | | | | |
| 1 | 0 | 1 | | | | | |
| 2 | -1 | 0 | 1 | | | | |
| 3 | 0 | -2 | 0 | 1 | | | |
| 4 | 1 | 0 | -3 | 0 | 1 | | |
| 5 | 0 | 3 | 0 | -4 | 0 | 1 | |
| 6 | -1 | 0 | 6 | 0 | -5 | 0 | 1 |

Figure 15.2: Šest dvojic (A) a jedna trojice (B) řetězce L_6 

Koeficient a_1 při x^2 v polynomiálu odpovídající součtu vlastních hodnot je 0, poněvadž stopa \mathbf{A} je nula. Koeficient a_2 při x^1 odpovídající součtu členů $\lambda_i \lambda_j x$, je úměrný počtu hran v grafu. To platí také pro grafy s více vrcholy, protože tyto členy se objevují v polynomiálu, když se diagonála členů x násobí mimodiagonálními prvky. V důsledku symetrie matice sousedství všechny členy při $x^{n-k_{liché}}$ jsou nulové a členy u $x^{n-k_{sudé}}$ se tvoří počtem k -násobků izolovaných hran. Tyto k -tic jsou známé jako *obrázky hran*.

Například řetězce L_6

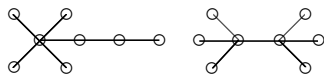
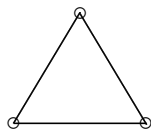


členy polynomiálu jsou 5, 6 1.

Polynomiál matice sousedství \mathbf{A} stromů je známý jako *acyklický polynomiál*, protože není přizpůsoben pro cykly. Je současně *polynomiálem shodnosti* acyklických grafů.

Polynomiální koeficienty lineárních řetězců lze zobrazit v tabulkové formě dosti snadno (tabulka 15.1).

Figure 15.3: Pár nejmenších isospektrálních stromů

Figure 15.4: Úplný graf K_3 a současně cyklus C_3 

U L_6 máme 5 hran. šest dvojic a jedna trojice jsou ukázané na obr. 15.2.

Prvky tabulky 15.1 (srovnej s tabulkou 10.7) jsou binomiální koeficienty a řádkové součty absolutních hodnot koeficientů jsou Fibonacciho čísla. Koeficienty polynomiálů lineárních řetězců jsou největší, které lze získat pro stromy. Je jasné, že neexistuje příliš mnoho kombinací těchto koeficientů. Poněvadž počet stromů je rychle rostoucí funkce, a koeficienty jsou omezené, jejich kombinace ve srovnání stromů jsou řidší a výsledkem je, že stromy musí být *isospektrální*. To znamená, že rozdílné typy stromů musí mít identická spektra. Na obr. 15.3 je pár nejmenších isospektrálních stromů, jehož polynomiál je $x^8 - 7x^6 + 9x^4$.

Acyklické polynomiály se kombinují s *polynomiálem cyklů*, pokud se objevují v grafu cykly. účinek cyklů lze ukázat na příkladě matice sousedství K_3 (obr. 15.4):

$$\begin{pmatrix} x & -1 & -1 \\ -1 & x & -1 \\ -1 & -1 & x \end{pmatrix} = P(\mathbf{A}) = x^3 - 3x + 2$$

objevuje koeficient 2 u členu x^0 . Ten je vytvořený cyklem C_3 . Tento cyklus se počítá dvakrát. Tato násobnost se objevuje u všech cyklů, které se musí sečítat odděleně od acyklických členů. Cykly sudé délky se odečtou od počtu $k/2$ -tic izolovaných hran. Je dosti snadné zkonstruovat polynomiál izolovaných cyklů. Pokud odstraníme z cyklu hranu, změní se na lineární řetězec, jehož acyklický polynomiál už známe, a přemostňující hrana se kombinuje s k -ticemi s $(n-3)$ hranami cyklu, jako kdyby tvořily rozdíly lineárního řetězce s $(n-2)$ vrcholy. Tyto k -tice jsou odečteny od členů L_n . Například

$$P(C_6) = P(L_6) + P(L_4) = (x^6 - 5x^4 + 6x^2 - 1) - (x^4 - 3x^2 + 1) = x^6 - 6x^4 + 9x^2.$$

Aby se dostal cyklický polynomiál, musíme odečíst koeficient 2 pro cyklus délky $n = 6$. Výsledkem je

$$x^6 - 6x^4 + 9x^2 - 2.$$

Pokud matice sousedství je vážená nebo graf obsahuje násobné hrany, polynomiál lze patřičně modifikovat. Ukázali jsme, že koeficient a_2 polynomiálu při x^{n-2} je tvořen čtverci prvků matice. Další členy ve větších maticích jsou složitější. Nalezení všech k-tic izolovaných hran a cyklů v grafech s mnoha vrcholy a hranami je pracné a výpočet polynomiálů touto technikou už není praktický.

15.6 Clujsky vážené matice sousedství lineárních řetězců

Diadudea zavedl asymetricky vážené matice vzdáleností, Clujské matice (pojmenované podle jeho domovského města Cluj v Rumunsku), Wienerovými váhami $N_{i,(i,j)}$ a $N_{j,(i,j)}$ (počet vrcholů na konci j cesty p_{ij} od diagonálního vrcholu ($i = j$) k mimodiagonálnímu vrcholu j ($i \neq j$)).

Nejprve je nutné vysvětlit vztahy Clujských matic k jiným maticím charakterizujícím grafy, jako jsou incidenční matice \mathbf{S} (orientované grafy) \mathbf{G} (neorientované grafy), matice procházek a cest definovaných \mathbf{W} na orientovaných hranách (neorientovaných hranách), matice procházek a cest definovaných \mathbf{P} na vrcholech, viz příští kapitulu.

Prvky incidenční matice orientovaného grafu \mathbf{S} jsou definované jako $s_{ij} = -1$, pokud orientovaná hrana i jde od vrcholu j , $s_{ij} = 1$ pokud orientovaná hrana i jde k vrcholu j , $s_{ij} = 0$ jinak. Kvadratická forma incidenční matice se svou transponovanou maticí \mathbf{S}^T je známá jako Laplace-Kirchhoffova matice. Je rozložena do diagonální matice stupňů vrcholů \mathbf{V} a matici mimodiagonálních prvků známé jako matice sousedství \mathbf{A} ($a_{ij} = 1$, pokud vrchol i sousedí s vrcholem j , $a_{ij} = 0$ jinak)

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S}. \quad (15.10)$$

Druhá kvadratická forma incidenční matice se svou transponovanou maticí $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ má mimodiagonální prvky odpovídající maticím sousedství \mathbf{A} hranového grafu. U stromů tato matice má rozměr $(n - 1)$ a má pravou inverzi, což je kvadratická forma matice procházek a cest \mathbf{W} definovaných \mathbf{W} na orientovaných hranách (neorientovaných hranách).

Matice procházek a cest \mathbf{P} jsou definovány pro stromy také na vrcholech. Prvky \mathbf{P}_p (cesta) jsou pro orientované stromy $p_{ij} = 1$, pokud vrchol j je incidentní s cestou i , $p_{ij} = 0$ jinak. Prvky \mathbf{P}_w (procházka) jsou pro neorientované stromy $p_{ij} = 1$, pokud vrchol j je na konci cesty i , $p_{ij} = -1$, pokud vrchol j je vnitřním vrcholem cesty i , $p_{ij} = 0$ jinak.

Součet

$$\mathbf{P}_w + \mathbf{P}_p \quad (15.11)$$

je dvakrát incidenční matice \mathbf{G}_K úplného neorientovaného grafu K_n , poněvadž v součtu zbývají pouze přímé procházky mezi všemi páry vrcholů.

Clujské matice stromů jsou skalární součiny transponované matice procházek \mathbf{P}_p^T s incidenční maticí \mathbf{G}_K (tyto konvence lze transponovat)

$$\mathbf{C}_p = \mathbf{P}_p^T \mathbf{G}_K \quad (15.12)$$

Například pro lineární řetězec L_4

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonální prvky skalárního součinu počítají $(n-1)$ procházky jdoucí od vrcholu $j = i$ k jiným vrcholům. Mimodiagonální prvky skalárního součinu počítají procházky incidentní s oběma vrcholy i a j . Mimodiagonální matice je Clujská matice \mathbf{C}_e

Poněvadž Diadudea se zajímal hlavně o chemické aspekty nových matic \mathbf{C}_p , zůstaly nepovšimnuté některé vlastnosti přímých (Hadamardových) součinů Clujské matice s odpovídající maticí sousedství \mathbf{A} :

$$\mathbf{C}_e = \mathbf{C}_p \bullet \mathbf{A} \quad (15.13)$$

což ponechává pouze sousedící prvky Clujské matice \mathbf{C}_e (nebo rovnocenně Clujsky vážené matice sousedství \mathbf{A}_C , například pro lineární řetězec L_4 (n-butan) shora

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Základní vlastnosti těchto matic sousedství vážených počtem vrcholů na konci orientovaných hran (neorientovaných hran) \mathbf{A}_C jsou:

1) Součet jejich prvků je $n(n-1)$. Každá z $(n-1)$ hran má n vrcholů na svých koncích.

2) Stopa je nulová.

3) Součet čtverců vlastních hodnot je $2W$:

$$\text{Tr} \mathbf{A}_C^2 = 2W \quad (15.14)$$

poněvadž na stopě \mathbf{A}_C^2 se objevují dvakrát součiny počtu vrcholů $N_{i,(i,j)} N_{j,(i,j)}$ na obou stranách všech hran.

Spektrum je symetrické, vlastní hodnoty se objevují v párech $\pm \lambda_j$. Liché vlastní hodnoty stromů s lichým počtem vrcholů jsou nulové. Největší vlastní hodnota je $(n-1)$, což je totožné s největšími prvky matice N_{ij} koncových vrcholů.

člen charakteristického polynomiálu x^{n-1} je nulový, člen x^{n-2} je Wienerovo číslo.

Párem největších vlastních hodnot $\pm(n-1)$ hvězd jsou jejich jediné nenulové vlastní hodnoty. To je konsistentní s jejich Wienerovým číslem S_n : $W_S = (n-1)^2$.

Vlastní hodnoty lineárních řetězců L_n s lichým n (z prohlídky prvních řetězců) mají hodnoty $(0, \pm[2, 4, \dots, (n-1)])$, vlastní hodnoty lineárních řetězců L_n se sudým n mají hodnoty $(\pm[1, 3, \dots, (n-1)])$.

Tyto hodnoty se shodují s kombinatorickými identitami pro sekvence binomiálních koeficientů:

pro liché n :

$$\binom{n+1}{3} = \sum_{k=0}^{(n-1)/2} (2k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \quad (15.15)$$

pro sudé n :

$$\binom{n+1}{3} = \sum_{k=1}^{n/2} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \quad (15.16)$$

Charakteristický polynomiál lze vypočítat analogicky se známou metodou určující charakteristický polynomiál nevážené matice sousedství stromů počítáním všech k -tic izolovaných hran. Zde každá k -tice dostane svou váhou určenou všemi součiny orientovaných hran (neorientovaných hran) $N_{i,(i,j)} N_{j,(i,j)}$.

Například pro L_5 :

Váhy vazeb $1-4 = 4$; $2-3 = 6$; $3-2 = 6$; $4-1 = 4$;

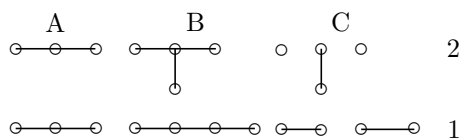
x^3 člen (1-tice, Wienerův člen): $4 + 6 + 6 + 4 = 20$;

x^1 člen (2-tice): $(4 \times 6) + (4 \times 6) + (4 \times 4) = 64$.

Charakteristický polynomiál: $P = x^5 - 20x^3 + 64x$.

člen x^{n-1} charakteristického polynomiálu je nula. To odpovídá součtu vlastních hodnot. Člen x^{n-2} charakteristického polynomiálu je určen součtem 1-tic. Tedy je to Wienerův člen. Odpovídá součtu součinů dvou vlastních hodnot. Obě rekurence se shodují s kombinatorickými identitami shora.

Figure 15.5: Ořezávání grafů. Grafy 1A a 2A se zvětší přičtením jedné hrany a jednoho vrcholu (1B a 2B). Grafy B se ořezou vynecháním nových hran dohromady se sousedícími vrcholy (prázdné kroužky) a sousedících hran (1C a 2C).



15.7 Techniky ořezávání

Charakteristický polynomiál acyklického grafu je determinant difference jeho matice a diagonální matice $x\mathbf{I}$. Když graf se zvětší přičtením nového vrcholu a hrany, charakteristický polynomiál se změní podle místa, kde je připojený nový vrchol. Jinak, pokud se zmenší velikost grafu odečtením jednoho vrcholu a jeho hran, polynomiál indukovaného grafu je diferencí podle grafu, který zůstává, když spojující vrchol, ke kterému je připojený nový vrchol, se odstraní se všemi svými hranami. Konečný charakteristický polynomiál lze potom napsat jako determinant 2×2 matice. Například (obr. 15.5).

$$\begin{pmatrix} (x^3 - 2x) & x^2 \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^4 - 3x^2$$

$$\begin{pmatrix} (x^3 - 2x) & (x^2 - 1) \\ 1 & x \end{pmatrix} = x^4 - 3x^2 + 1$$

V prvním případě dva volné vrcholy K_1 odpovídají členu x^2 , v druhém případě graf K_2 odpovídá členu $(x^2 - 1)$.

Grafu lze ořezat více větví současně a větvemi nemusí být izolované vrcholy, ale také grafy. Na diagonále se zde objevují vždy polynomiály ořezaných a ořezávaných grafů a mimodiagonální prvky jsou jejich odpovídajícími rozdíly. Jedinou nutnou podmínkou je, že všechny subgrafy musí být spojené *mosty*, hranami nebo orientovanými hranami spojujícími dva vrcholy bez cyklů. Potom se objevují v matici polynomiály odpovídajících subgrafů a jejich rozdílů, polynomiály odpovídajících subgrafů bez spojujícího vrcholu

$$\begin{pmatrix} \text{polynomiál A} & \text{diference AB} \\ \text{diference BA} & \text{polynomiál B} \end{pmatrix}.$$

Například hvězda S_3 ořezaná jako $2K_1$ a K_2

$$\begin{pmatrix} x^2 - 2 & 2 \\ 1 & x - 1 \end{pmatrix}$$

Ořezávání snižuje rozměrnost polynomiálu.

15.8 Polynomiály grafů se smyčkami

Diagonální matice stupňů vrcholů \mathbf{V} lze považovat za matice sousedství grafu, který se skládá pouze ze smyček. Její polynomiál se získá jednoduše jako součin

$$\prod_{j=1}^n (x - v_j) = \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j). \quad (15.17)$$

Koeficienty polynomiálu lze vypočítat také jako součty všech k -tic izolovaných smyček na rozdílných vrcholech například pro $v_j = 2, 1, 1$:

| Smyčka | 1-tice | 2-tice | 3-tice |
|----------|----------|--------------------|---------|
| * * | * 0 0* | *0 *0 0* 0 * | *0 0* |
| | * | * * | * * |
| | * | * | * * |
| Σ | 4 | 5 | 2 |

Smyčkový polynomiál je $P(V) = x^3 - 4x^2 + 5x^1 - 2$. To umožňuje najít polynomiály kvadratických forem $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ nebo $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ ($\mathbf{V} \pm \mathbf{A}$).

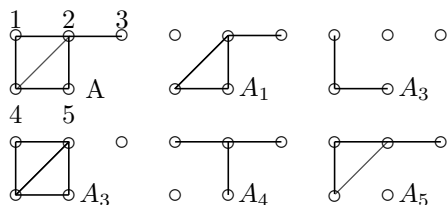
Obrázky smyček se kombinují s obrázky hran nebo orientovaných hran. Všechny páry smyček se počítají společně s jedním obrázkem hran. Obrázky smyček tvořené smyčkou a hranou se počítají dohromady se smyčkami 3-tic. Tedy polynomiály kvadratické formy incidenční matice orientovaných a neorientovaných grafů obsahují všechny členy polynomiálu, nejen každý druhý člen jako acyklické polynomiálu. Konečný smyčkový polynomiál L_4 má 3 složky

| | | | | |
|-----------------------------|-------|---------|---------|------|
| Smyčkový polynomiál | x^3 | $-4x^2$ | $+5x^1$ | -2 |
| Hranový polynomiál | | | $-2x^1$ | |
| Cyklický polynomiál | | 0 | | |
| Hranový-smyčkový polynomiál | | | | $+2$ |
| Výsledný polynomiál | x^3 | $-4x^2$ | $+3x^1$ | |

účinek diagonálních prvků je jednoduchý, když všechny diagonální prvky jsou stejné r , jako u *pravidelných grafů*. Neznámé x lze nahradit substitucí $y = (x + r)$ a matice pojednat, jako by byly bez diagonálních prvků. To lze využít v některých případech pro výpočet determinantů, jak uvidíme později.

15.9 Grafy s vymazanými vrcholy a hranami

Množina n subgrafů grafu G , získaná z původního grafu vynecháním každého vrcholu se všemi jeho incidentními orientovanými hranami nebo neorientovanými hranami, je známá jako *Ulamovy subgrafy*. Ulam vyslovil domněnku, že původní graf lze rekonstruovat z této množiny. To se zdá triviální, avšak je nesnadné to dokázat pro neoznačené grafy, kde neexistuje žádný jednoduchý způsob, jako spárovat neoznačené vrcholy dvou grafů. Existuje jiný vztah, polynomiály Ulamových subgrafů jsou rozdíly polynomiálu původního grafu. To znamená,

Figure 15.6: Graf A a jeho vrcholově vymazané subgrafy $A_1 - A_5$ 

že vrchol vymazaný v subgrafu $\delta_j G$ je částečnou diferencí původního grafu podle vymazaného vrcholu $\delta_j P(G)$ nebo diferencí odpovídající matice získané odstraněním odpovídající řádky a sloupce. Pravidla diferencování a integrování jsou stejná jako v diferenciálním a integrálním kalkulu

$$\delta x^n = nx^{n-1} \quad (15.18)$$

$$\int nx^{n-1} = x^n \quad (15.19)$$

Rekonstrukce původního polynomiálu matice ze součtu rozdílů

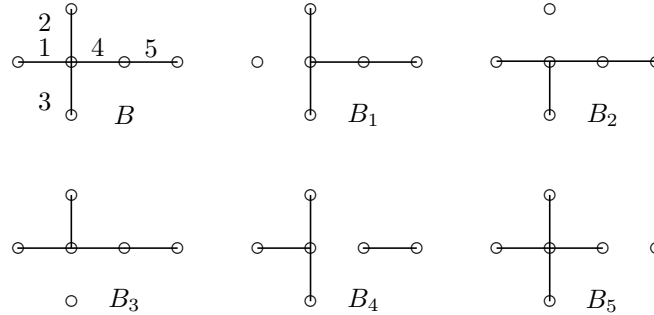
$$P(M) = \int \sum_{j=1}^n \delta_j P(M) \quad (15.20)$$

je přesná až integrační konstantu, která mizí v diferencích.

Například u grafu na obr. 15.6 odpov polynomiály jeho Ulamových subgraf jsou

| | | | | |
|----------------|--------|----------|---------|------|
| \mathbf{A}_1 | x^4 | $-4x^2$ | $-2x$ | $+1$ |
| \mathbf{A}_2 | x^4 | $-2x^2$ | | |
| \mathbf{A}_3 | x^4 | $-5x^2$ | $-4x$ | |
| \mathbf{A}_4 | x^4 | $-3x^2$ | | |
| \mathbf{A}_5 | x^4 | $-4x^2$ | $-2x$ | $+1$ |
| Σ | $5x^4$ | $-18x^2$ | $-8x$ | $+2$ |
| \mathbf{A} | x^5 | $-6x^3$ | $-4x^2$ | $2x$ |

V grafech s vymazanými hranami (nebo orientovanými hranami) se eliminují pouze samotné hrany (orientované hrany) bez vymazání incidentních vrcholů, což odpovídá eliminaci odpovídajících řádků a sloupců v kvadratické formě \mathbf{GG}^T nebo \mathbf{SS}^T . Množina hran vymazaných subgrafů má m subgrafů, kde m je počet hran grafu. Ve stromech každý subgraf má vždy dvě složky. Zde se také součet polynomiálů hranově vymazaných subgrafů stromů je difference polynomiálu původního stromu, avšak pravidla diferencování jsou rozdílná. Koeficientů při $(n-2k)$ mocnin x se nenásobí mocninami x a mocnost x se nesnižuje, avšak dělí se $(m-k)$ a mocnina x je zanechána nezměněná.

Figure 15.7: Strom B a jeho hranově vymazané subgrafy $B_1 - B_5$ 

Hranově vymazaný strom je les s n vrcholy a první člen jeho polynomiálu je x^n . Existuje m subgrafů a tedy součet polynomiálů všech subgrafů je dělitelný m . Všechny subgrafy obsahují $(m - 1)$ hran a tedy koeficient druhého členu součtu, když se dělí tímto číslem dává m . Následující koeficienty se mohou odvodit s použitím úplné indukce. Pokud vztah polynomiálu platí pro původní strom, tak musí platit také pro jeho subgrafy (lesy), obsahující o jednu hranu méně, a jejich polynomiály. Odpovídající koeficienty všech subgrafů musí být 0 mod $(m - k)$. To platí také pro člen a_{n-k} pokud $n = (2k + 1)$. Mezi subgrafy lineárního řetězce existuje k subgrafů obsahujících člen odpovídající $(k + 1)$ -tici. Například u grafu na obr. 15.7 odpovídající polynomiály jeho hranově vymazaných subgrafů jsou

| | | | |
|--------|--------|----------|---------|
| B_1 | x^6 | $-4x^4$ | $+2x^2$ |
| B_2 | x^6 | $-4x^4$ | $+2x^2$ |
| B_3 | x^6 | $-4x^4$ | $+2x^2$ |
| B_4 | x^6 | $-4x^4$ | $+3x^2$ |
| B_5 | x^6 | $-4x^4$ | |
| \sum | $5x^6$ | $-20x^4$ | $+9x^2$ |
| B | x^6 | $-5x^4$ | $-3x^2$ |

Pro odpovídající polynomiály vymazaná hrana snižuje počet obrázků s k izolovanými hranami. Existuje vždy $(m - k)$ takových subgrafů se stejným polynomiálem. Když se podělí tento parametr koeficienty u členů při x^{n-2k} , dostaneme také acyklické polynomiály pro cyklické grafy. Například

$$K_4 : x^4 - 6x^2 + 3\Sigma_i \delta(P) = 6(x^4 - 5x^2 + 2) = (6/6)x^4 - (30/5)x^2 + (12/4) .$$

Rozdíly matic budou užitečné pro nalezení jejich inverzí.

15.10 Seidlovy matice regulárních grafů

Seidel definoval modifikovanou matici sousedství \mathbf{A}_S pro tak zvané schlicht¹ grafy (s jednoduchými orientovanými hranami) následujícím způsobem: $a_{ij} = -1$ pokud i a j vrcholy sousedí, $a_{ij} = 1$ pokud i a j vrcholy nesousedí a $a_{ii} = 0$. To znamená, že

$$\mathbf{A}_S = \overline{\mathbf{A}} - \mathbf{A}. \quad (15.21)$$

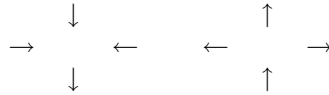
Tuto matici lze interpretovat jako diferenci matic sousedství grafu G a jeho doplňkového grafu \overline{G} . Seidlovy matice pravidelných grafů se mohou formulovat jako difference Laplace-Kirchhoffovy matic $\mathbf{K} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ obou grafů opravených pravidelnými diagonálními členy $(n-1-2r)$, kde r jsou stupně vrcholů pravidelného grafu.

$$\mathbf{A}_S = \mathbf{K} - \overline{\mathbf{K}} + (n-1-2r)\mathbf{I}. \quad (15.22)$$

Tedy Seidlova matice pravidelného grafu má spektrum, které se získá z difference spekter jeho Laplace-Kirchhoffovy matice \mathbf{K} a Laplace-Kirchhoffovy matice jeho doplňkového grafu $\overline{\mathbf{K}}$ opravených diagonálními členy. Například pro cykl C_4 :

| | | | | |
|---------------------------|-----|-----|-----|-----|
| Spektrum C_4 | 4, | 2, | 2, | 0 |
| Spektrum $\overline{C_4}$ | 0, | -2, | -2, | 0 |
| $\Delta(n-1-2r)$ | -1, | -1, | -1, | -1 |
| Spektrum \mathbf{A} | 3, | -1, | -1, | -1. |

Výsledek je identický se spektrem matice sousedství úplného grafu K_4 , přesto, že Seidlova matice obsahuje jednotkové prvky obou znamének. Avšak obě matice, $\mathbf{A}(K_4)$ a $\mathbf{A}_S(K_4)$ jsou matice sousedství hranového grafu dvojhvězdy S_5 s rozdílnými orientacemi. Poněvadž obě orientace



mají identické Laplace-Kirchhoffovy matice \mathbf{K} a tedy také identická spektra. Výsledek je správný.

S použitím stejné argumentace kvadratická forma $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ dvojdílných cyklů (n sudé), jejichž Spektra jsou ekvivalentní Laplace-Kirchhoffovým maticím $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$, mají všechny mimodiagonální prvky buď záporné nebo jeden mimodiagonální prvek v každé řádce může být záporný a druhý kladný. Pokud kombinujeme $\mathbf{K}(C_{2k})$ s $\mathbf{K}(\overline{C_{2k}})$, výsledek je identický s diferencí $\mathbf{K}(kK_2) - \mathbf{K}(k\overline{K_2})$. Tedy Seidlovy matice sousedství k úplných grafů K_2 a cyklů C_{2k} jsou isospektrální. Například:

¹Z němčiny.

| | | | | | | |
|--|-----|-----|-----|-----|-----|----|
| Spektrum $\mathbf{K}(3K_2)$ | 2 | 2, | 2 | 0, | 0, | 0 |
| Spektrum $\mathbf{K}(3\overline{K_2})$ | -4, | -4, | -4, | -6, | -6, | 0 |
| $\Delta(n-1-2r)$ | 3, | 3, | 3, | 3, | 3, | 3 |
| Spektrum $\mathbf{A}(3K)$ | 1, | 1, | 1, | -3, | -3, | 3 |
| Spektrum $\mathbf{K}(C_6)$ | 4, | 3, | 3, | 1, | 1, | 0 |
| Spektrum $\mathbf{K}(\overline{C_6})$ | -2, | -3, | -3, | -5, | -5, | 0 |
| $\Delta(n-1-2r)$ | 1, | 1, | 1, | 1, | 1, | 1 |
| Spektrum $\mathbf{A}(C_6)$ | 3, | 1, | 1, | -3, | -3, | 1. |

15.11 Spektra neorientovaných podrozdělených grafů

Podrozdělený graf $S(G)$ se získá z grafu G vložení nového vrcholu do každé z jeho m hran. Matice sousedství neorientovaného podrozděleného grafu $\mathbf{A}[S(G)]$ se získá přímo z incidenční matice \mathbf{G} původního grafu jeho zapsáním v blokové formě

$$\mathbf{A}[S(G)] = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

kde $\mathbf{0}$ je nulová matice.

Spektra matic sousedství podrozdělených grafů s n vrcholy a m hranami jsou ve vztahu se spektry kvadratických forem $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ původního grafu jako

$$P_{S(G)}(\lambda_j) = (\lambda_j = 0)^{\|m-n\|} \pm P_{G^T G}(\lambda_j)^{1/2} \quad (15.23)$$

kde $G^T G \lambda_j$ jsou vlastní hodnoty kvadratické forma incidenční matice \mathbf{G} původního grafu. Stejný vztah platí také pro podrozdělené orientované grafy $S(G)$ s incidenčními maticemi \mathbf{S} .

Matice sousedství $\mathbf{A}^2[S(G)]$ má dva bloky $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ a $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$. Oba bloky mají identická spektra. Jejich odmocniny s oběma znaménky tvoří spektrum matice sousedství podrozděleného grafu. Diferenci mezi počtem vrcholů a hranách zaplňují nulové vlastní hodnoty.

To lze využít pro výpočty. Například cyklus C_3 má matici sousedství \mathbf{A} ekvivalentní se svou incidenční maticí \mathbf{G} . Podrozdělený graf cyklu C_3 je cyklus C_6 . Jeho matice sousedství \mathbf{A} je

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kvadratické bloky jsou identické

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a mají vlastní hodnoty: 4, 1, 1, tedy matice sousedství \mathbf{A} pro C_6 má vlastní hodnoty: 2, 1, 1, -1, -1, -2.

Podrozdělený graf hvězdy S_4 má matici sousedství \mathbf{A}

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kvadratické bloky jsou

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Už víme, že první blok má vlastní hodnoty: 4, 1, 1, tedy matice sousedství \mathbf{A} u $S(S_4)$ má vlastní hodnoty: 2, 1, 1, 0, -1, -1, -2.

Všechny podrozdělené grafy hvězd S_n mají spektrum odvozené ze spekter svých hranových grafů $\mathbf{G}\mathbf{G}^T = \mathbf{I} + \mathbf{J}\mathbf{J}^T$. Odpovídající spektra jsou $n, 1^{n-1}$ a snadno se naleznou jejich odmocniny. Znaménka jsou určena nulovou stopou matice sousedství \mathbf{A} .

15.12 Matice sousedství linkových grafů

Kvadratická forma $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ incidenční matice \mathbf{G} definuje hranový graf $L(G)$ původního grafu G . Hranový graf se získá ze svého původního grafu, když se jeho hrany transformují ve vrcholy, které jsou incidentní, pokud mají v původním grafu společný vrchol. Vztah mezi kvadratickou formou $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ matice sousedství $\mathbf{A}[L(G)]$ hranového grafu pro původní grafy s jednoduchými hranami je

$$\mathbf{G}\mathbf{G}^T = 2\mathbf{I} + \mathbf{A}[L(G)], \quad (15.24)$$

kde \mathbf{I} je jednotková diagonální matice. Tedy existuje vztah mezi vlastními hodnotami matice sousedství $\mathbf{A}[L(G)]$ hranového grafu

$$P_{L(\mathbf{A})}(\lambda_j) = P_{\mathbf{G}\mathbf{G}^T}(\lambda_j - 2). \quad (15.25)$$

Hranový graf lineárního řetězce L_n je lineární řetězec L_{n-1} . Podrozdělený graf lineárního řetězce L_n je lineární řetězec L_{2n-1} .

Dvě podmínky podrozdělených grafů (equation 15.11) a hranových grafů (equation 15.12) určuje vztahy mezi vlastními hodnotami matic lineárních řetězců jako

| L_n | $\lambda_j(\mathbf{G}\mathbf{G}^T)$ | $\lambda_j(\mathbf{A})$ |
|-------|-------------------------------------|---------------------------------|
| n=2 | 2, 0 | 1, -1 |
| 3 | 3, 1 | $\sqrt{2}$, 0, $-\sqrt{2}$ |
| 4 | $2 + \sqrt{2}$, 2, $2 - \sqrt{2}$ | 1.618, 0.618, -0.618, -1.618 |
| 5 | 3.618, 2.618, 2, 1.382, 0.382 | $\sqrt{3}$, 1, -1, $-\sqrt{3}$ |

Tyto vztahy vedou ke vzorci pro vlastní hodnoty matice sousedství \mathbf{A} lineárních řetězců

$$\mathbf{A}_{(L_n)}(\lambda_j) = 2 \cos j\pi/(n-1). \quad (15.26)$$

Lineární řetězec L_n se chová jako tyč upevněná ve svém středu. To je opak k řadě, která je upevněná na svých koncích. Její vibrace popisuje sinusová funkce.

15.13 Orientované podrozdělené grafy

Matice sousedství podrozdělených grafů odvozené z incidenční matice \mathbf{S} orientovaných grafů kladou složitější problém. Vzpomeňte si, že orientované grafy jsou tvořeny orientovanými hranami jdoucími od vrcholu j k vrcholu i . Jejich incidenční matice \mathbf{S} má v každé řádce diferenci dvou jednotkových vektorů ($\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$). Kvadratická forma $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$, z které matice sousedství \mathbf{A} je odvozená, má všechny své mimodiagonální prvky záporné: $\mathbf{S}^T\mathbf{S} = (\mathbf{V} - \mathbf{A})$, kde \mathbf{V} je diagonální matice stupňů vrcholů v_j . Tedy všechny prvky matice sousedství orientovaného grafu jsou obvykle kladné².

Nejprve je nutné vyřešit otázku, v jakém vztahu jsou vlastní hodnoty matice sousedství mající prvky obou znamének k vlastním hodnotám matice sousedství s jednotnými znaménky. Jednoduché cvičení v násobení matic ukazuje, že prvek a_{ij} matice sousedství hranového grafu je záporný, pokud obě orientované hrany mají stejnou orientaci (stýkají se hlavou k ocasu). Abychom udrželi takovou orientaci, všechny stupně vrcholů grafu v_j musí být 1 nebo 2, což je možné v lineárních řetězcích a jednoduchých cyklech. Pokud se stýká ve vrcholu tři nebo více orientovaných hran, potom alespoň dvě musí mít opačnou orientaci, a v matici sousedství hranového grafu se objevuje kladné znaménko. Pokud je graf dvojdílný, potom je možné vybrat orientaci orientovaných hran takovým způsobem, že všechny prvky matice sousedství jsou kladné. Poněvadž kvadratická forma $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ je nezavislá na orientaci orientovaných hran, všechny kvadratické formy $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ dvojdílných grafů musí mít identické spektrum jako kvadratická forma $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ s jednotnými znaménky.

²Prvky s oběma znaménky se objevují v Laplace-Kirchhoffových maticích komplementárních grafů grafů s násobnými hranami vznikajícími z Eichingerových matic \mathbf{E} , které jsou pseudoinverzí Laplace-Kirchhoffových matic $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ (viz příští kapitolu).

To lze shrnout tak, že kvadratické formy

$$\mathbf{S}\mathbf{S}^T = 2\mathbf{I} \pm \mathbf{A}[L(G)]$$

orientovaných lineárních řetězců L_n a dvojdílné (n sudé) jednoduché cykly C_n mají identická spektra, a matice sousedství jejich hranových grafů musí mají vlastní hodnoty mající tvar $\pm(\lambda_j \pm 2)^{1/2}$. Jednoduché cykly, které jsou podrozdělenými grafy cyklů s lichým počtem vrcholů, mají vlastní hodnoty ve tvaru $\pm(\lambda_j^2 - 2)^{1/2}$. Vlastní hodnoty podrozdělených grafů dvojdílných grafů mají vlastní hodnoty $\pm(\lambda_j^2 + 2^{1/2})$, kde λ_j jsou vlastní hodnoty odpovídajících hranových grafů.

Pro pravidelné orientované grafy platí vztah (15.11) pro všechny orientace podrozdělených grafů. Pro jiné grafy je nutné vyřešit účinky rozdílných orientací orientovaných hran v orientovaném grafu na spektra odpovídajících podrozdělených grafů individuálně.

15.14 La Verrier-Frame-Faddějevova technika

Tato technika spočívá na vlastnostech součinů matic a jejich vztahu se součiny vlastních hodnot

$$Sp(\mathbf{M}^k) = Sp(\lambda_j^k) \quad (15.27)$$

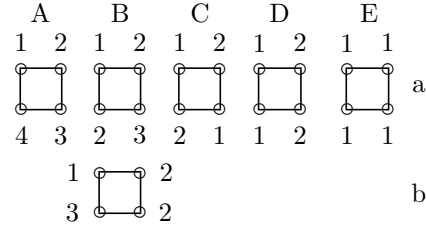
Pokud odečteme od matice \mathbf{M} diagonální matici hodnot stopy $Tr(\mathbf{I})$, odečteme součet vlastních hodnot od každé diagonální hodnoty matice \mathbf{M} . Nazveme to diferencí matice \mathbf{B}_1 . Její součin maticí \mathbf{M} má vlastní hodnoty tvořené součty párů rozdílných vlastních hodnot matice \mathbf{M}

$$Sp[(\mathbf{M} - Tr(\mathbf{I})\mathbf{I})\mathbf{M}] = Sp(\mathbf{B}_1\mathbf{M}) = Sp(\Sigma\lambda_j^2 - \Sigma\lambda_j^2 - 2\Sigma\lambda_i\lambda_j) \quad (15.28)$$

členy $\Sigma\lambda_j^2$ se vzájemně eliminují. Tedy stopa součinu je dvojnásobek součtu součinů dvou vlastních hodnot matice \mathbf{M} , což je koeficient a_2 při x^{n-2} . Když odečteme tento koeficient od diagonály součinu $\mathbf{B}_1\mathbf{M}$, dostaneme matici \mathbf{B}_2 , jejíž součin s maticí \mathbf{M} nám dává na diagonále trojnásobek součtu součinu tří rozdílných vlastních hodnot matice \mathbf{M} :

$$Sp[(\mathbf{M} - Tr(\mathbf{M})\mathbf{M} - a\mathbf{I})\mathbf{M}] = \sum (\lambda_j^3 - \lambda_j^3 - 2\lambda_j^2\lambda_j + 2\lambda_i\lambda_j^2 - 3\lambda_i\lambda_j\lambda_k) \quad (15.29)$$

Tímto způsobem pokračujeme n krát nebo dokud nedostaneme v nějakém kroku jako výsledek matici $\mathbf{B}_k = \mathbf{0}$. Už jsme použili tuto techniku pro matice v trojúhelníkovém tvaru, kde bylo nutné pouze prvé odečítání. Například

Figure 15.8: Správné (a) a nesprávné (b) indexování cyklu C_4 **M**

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

B₁

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$$

B₂

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & -2 & -4 \\ -2 & 9 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 9 & 1 \\ -4 & 1 & 1 & 13 \end{pmatrix}$$

B₃

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$$

B₃M

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Polynomiál je $x^4 - 8x^3 + 19x^2 - 16x - 1$.

Problém nalezení polynomiálů je tedy transformovaný na základní operace s maticemi, odečítání a násobení. Nad každou maticí se klene duha indukovaných matic, která na svém konci nám ukazuje polynomiál a v něm spektrum matice. Nalezení vlastních hodnot může být někdy, když se vyřeší technický problém, hrncem zlata na konci duhy.

Všimněte si, že **B₃M** je diagonální matice se stejnými hodnotami. To znamená, že **B₃** je násobek inverzní matice **M**⁻¹.

15.15 Kolapsované matice sousedství vysoce regulárních grafů

Vysoce pravidelné n rozměrné grafy jsou grafy charakterizované čtvercovou maticí $x\mathbf{A}'$ s rozměrem menším než n , mající vlastnost, že každý vrchol j sousedí s a' vrcholy i . Matice \mathbf{A}' jsou známy jako *kolapsované matice sousedství*. Příklady vysoce pravidelných grafů jsou úplné grafy K_n a cykly C_n . Některé indexování vrcholů vysoce pravidelných grafů je *správné*, pokud může být popsáno kolapsovanou maticí sousedství. Například cykl C_4 lze správně indexovat jako na obr.15.8. Indexování B je nesprávné, poněvadž vrcholy 2 nejsou ekvivalentní.

Kolapsování matice sousedství se dosáhne složením jejích hran a vynecháním odpovídajícího sloupce:

$$\begin{array}{cccc}
 \mathbf{A}_A & \mathbf{A}_B & \mathbf{A}_C & \mathbf{A}_D \\
 \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \\
 & & & \mathbf{A}_E \\
 & & & (2)
 \end{array}$$

Kolapsované matice sousedství se zdají mít zajímavou vlastnost: Polynomiály kolapsovaných matic sousedství \mathbf{A}' jsou dělitelé polynomiálů matic sousedství \mathbf{A} . Domněnkou je, že správně kolapsované matice sousedství mají stejnou množinu vlastních hodnot. Spektra kolapsovaných matic sousedství jsou useknutá k největším vlastním hodnotám.

Polynomiály kolapsovaných matic sousedství \mathbf{A}' jsou:

$$P(\mathbf{A}_A) = x^4 - 4x^2;$$

$$P(\mathbf{A}_B) = x^3 - 4x;$$

$$P(\mathbf{A}_C) = x^2 - 4;$$

$$P(\mathbf{A}_D) = x^2 - 2x;$$

$$P(\mathbf{A}_E) = x - 2.$$

15.16 Faktorová analýza

Definovali jsme ekvivalenci grafových vektorů jako třídy matic, které se mohou získat permutacemi řádek a nebo sloupců jednotkovou permutační maticí \mathbf{P} . Ekvivalentní matice mají stejné kvadratické formy, promítají se na jeden bod ve vektorovém prostoru. Nyní definujeme jiné třídy ekvivalence vzhledem ke společné kvadratické formě nebo obecněji vzhledem ke společnému součinu.

řekneme, že matice \mathbf{B} a \mathbf{C} jsou *ekvivalentní* pokud

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}, \quad (15.30)$$

nebo matice \mathbf{B}^T je ekvivalentní matici \mathbf{U} a matice \mathbf{B} je ekvivalentní matici \mathbf{V} pokud

$$\mathbf{B}^T \mathbf{B} = \mathbf{U} \mathbf{V}$$

Například následující matice jsou ekvivalentní podle této definice

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{3/2} & 0 \\ \sqrt{1/2} & \sqrt{1/6} & \sqrt{4/3} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{8/3} & 0 & 0 \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{1/6} & \sqrt{5/2} & 0 \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{1/6} & \sqrt{1/10} & \sqrt{12/5} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Existence takových párů nebo násobků má poněkud nepříjemný důsledek: Pokud známe pouze skalární součin, nemůžeme si být jisti, zda kořeny, které jsme našli, jsou správné nebo jsou pouze ekvivalentní k původním prvkům součinu.

Avšak existují také dobré zprávy o existenci ekvivalence: Můžeme nahradit neznámý maticový vektor kanonickou triangulární dekompozicí jeho kvadratické formy. To využívá *faktorová analýza*, když matice experimentálních výsledků obsahující stochastické chyby se nahradí součty matic majících velké váhy a difference se ponechá jako matice chyb.

Ukázali jsme v podkapitole 3.4, že inverzní matice matice v dolní trojúhelníkové formě s jednotkovou diagonálou se může představit jako součet mocnin samotné matice. Nyní ukážeme, že kvadratická forma se může rozložit do součtu *faktorů*, nebo svých transponovaných vlastních vektorů \mathbf{Z} :

$$\mathbf{Z} \mathbf{M}^T \mathbf{M} \mathbf{Z}^T = \Delta \lambda_j \quad (15.31)$$

$$\Sigma \lambda_j \mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{M} \mathbf{M}^T \quad (15.32)$$

Existuje vztah, který je doplňkem k rovnici 15.2

$$\Sigma \mathbf{Z}^T \mathbf{Z}^T = \mathbf{I} \quad (15.33)$$

Například matice \mathbf{Q}

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

má tři vlastní vektory, $(1, 1, 1)^T$, $(1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6})^T$ a $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})^T$, které dávají tři vnější kvadratické formy s násobnostmi

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} \lambda_{j=0} & \mathbf{B} \lambda_{j=3} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 1/6 & -2/6 & 1/6 \\ -2/6 & 4/6 & -2/6 \\ 1/6 & -2/6 & 1/6 \end{array} \right) \\ \mathbf{C} \lambda_{j=1} & \\ \left(\begin{array}{ccc} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{array} \right) & . \end{array}$$

Odpovídající součty jsou $\mathbf{Q} = 3\mathbf{B} + 1\mathbf{C}$ a $\mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

Vnější kvadratické formy vlastních vektorů jsou faktory korelační matice. Tyto korelační matice jsou rozloženy do svých faktorů majících největší vlastní hodnoty, které jsou normalizované na 1. V našem příkladě může být řečeno, že faktor \mathbf{B} vysvětluje 75% matice \mathbf{Q} a faktor \mathbf{C} zbývajících 25%.

Faktorová dekompozice je cenný nástroj pro vysvětlování rozsáhlých korelačních matic, když několik faktorů kryje uspokojivě největší část prvků korelační matice, že zbytek lze považovat za stochastickou chybu pozorování.

Chapter 16

Inversní matice

16.1 Úvod

Inverzní matice byly zmíněné vícekrát, avšak nyní by měly být vysvětleny systematictěji.

Je dosti snadný definovat inverzní prvek izolovaného prvku, jako je číslo nebo vektor. Avšak tato úloha se stává koncepčně nesnadnou pro celé systémy reprezentované maticovými vektory. A je trochu tajemné, jak definovat inverzní prvky k objektům. Můžete říci, co je vaší inverzí? Odpověď bude závislá na situaci: zda hledáte svou vnitřní inverzi pouze jako osoba, nebo svůj inverzní prvek jako části nějaké soustavy?

Nejprve si vzpomeňte na sekci 3.4. Tam se popisují dva typy inverzních prvků, aditivní a multiplikativní. Aditivní inverze je definována identit $a+b=0$, z toho $b=-a$. Záporný prvek má stejnou hodnotu a opačné znaménko ke svému původnímu prvku. Multiplikativní inverzní prvek je definován jako součin $ab=1$. Z toho $b=1/a$ a $a=1/a$. Odlišnost mezi prvkem a jeho inverzí je určena konvencí. Už jsme ukázali, že multiplikativní inverze jsou aditivní na logaritmické stupnici (obr. 3.5).

Pro matice také mohou být definované aditivní a multiplikativní inverzní matice s nulovými maticemi $\mathbf{0}$ a jednotkovými diagonálními maticemi \mathbf{I} jako jednotkovými prvky. Aditivní inverze pro \mathbf{M} se zdají být triviální, mají pouze inverzní znaménka $-\mathbf{M}$, poněvadž $\mathbf{M} - \mathbf{M} = \mathbf{0}$. Multiplikativní inverze jsou mnohem více zajímavé.

Nicméně už jsme definovali *komplementární grafy* $\overline{\mathbf{G}}_n$ k grafy \mathbf{G}_n rovnicí

$$\mathbf{G}_n + \overline{\mathbf{G}}_n = \mathbf{G}_{K_n} . \quad (16.1)$$

Doplňkový graf dohromady s původním grafem dává úplný graf K_n . Matice $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ a $\overline{\mathbf{S}^T\mathbf{S}}$ lze považovat za *zobecněnou aditivní inverzi*, jak vidíme později.

Nyní budeme uvažujeme multiplikativní inverze. Začneme jednotkovými permutačními maticemi \mathbf{P} , které představují symetrické grupy. Jejich inverze jsou jednoduše jejich transponované matice

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P} = \mathbf{I}. \quad (16.2)$$

Pro diagonální matice $\Delta \mathbf{M}$ inverzní prvky d_{ii} jsou prvky $1/d_{ii}$. Avšak, když kombinujeme diagonální matici s permutační maticí, její inverze není jednoduchým součtem obou částečných inverzí.

Problém inverzních matic je složitý pro některé asymetrické matice, které mají dvě rozdílné inverzní matice, jednu zleva a druhou zprava, protože násobení zleva má jiný účinek než násobení zprava. A mnoho matic nemá žádnou inverzní matici, poněvadž jsou singulární. Jejich spektrum obsahuje nějaké nulové vlastní hodnoty a jejich duha se neuzavírá.

Můžeme v této souvislosti upozornit na definici vlastních vektorů, \mathbf{Z} , které dávají, když se násobí s \mathbf{Z}^T jednotkovou diagonální maticí. Transponované matice vlastní vektorů matice \mathbf{Z}^T je levostranná inverzní matice pro \mathbf{Z} .

Pracovali jsme s kvadratickými formami a bude výhodné definovat pro tyto kvadratické formy třetí druh inverzních matic, *vnitřní inverzní matice* kvadratické formy jako matice \mathbf{R} , která dává, pokud to se násobí z jedné strany maticí \mathbf{M} a z druhé strany její transponovanou formou \mathbf{M}^T jednotkovou diagonální maticí:

$$\mathbf{M} \mathbf{R} \mathbf{M}^T = \mathbf{I} \quad (16.3)$$

Ty lze vyjádřit také konvenčně, $\mathbf{M} \mathbf{R}$ je *levostrannou inverzní maticí* pro \mathbf{M}^T a $\mathbf{R} \mathbf{M}^T$ je *pravostrannou inverzní maticí* pro \mathbf{M} .

Pokud opravíme součin vlastních vektorů s jejich maticí uvnitř jejich inverzními vlastními hodnotami, dostaneme jednotkovou diagonální matici. Tedy matice \mathbf{M} vážená inverzemi svých vlastních hodnot je vnitřní inverzní maticí matice svých vlastních vektorů. Například

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

16.2 Invertování matic

Ukázali jsme v kapitole 8, když jsme pracovali s maticemi kombinatorických čísel v trojúhelníkovém tvaru, že jejich inverzní matice se naleznou technikou inkluse a exkluse. Jiná technika vhodná pro nalezení inverzních matic byla už ukázaná v podkapitole 15.13 jako La Verrier-Frame-Faddějevova technika. Obě techniky jsou ekvivalentní v případě matic v dolní trojúhelníkové formě majících jednotkovou diagonálu. n -tá mocnina její difference s jednotkovou diagonální maticí dává nulovou matici $\mathbf{0}$. Když napíšeme všechny členy této mocniny a přeskupíme je vhodně, dostaneme

$$\mathbf{I} = [\mathbf{M}^{n-1} - n\mathbf{M}^{n-2} + (n(n-1)/2)\mathbf{M}^{n-3} \dots \pm n\mathbf{M}^1 \pm \mathbf{I}]\mathbf{M}. \quad (16.4)$$

Pravá strana matice v závorkách je levostrannou inverzní maticí \mathbf{M} matice v dolní trojúhelníkové formě \mathbf{M} .

Podobnou strukturu, pouze poněkud složitější, mají matice \mathbf{B}_{n-1} získané La Verrier-Fadějev-Frame technikou, kde koeficienty polynomiálu se používají pro odečítání násobků jednotkové diagonální matice v rozdílných krocích násobení maticí \mathbf{M} .

Inverzní matice se definuje s použitím determinantu $\text{Det}(M)$ a determinantů všech jeho submatic $\delta_{ij}\mathbf{M}$, známých jako *minory* \mathbf{A}_{ij} . $\delta_{ij}\mathbf{M}$ je maticí \mathbf{M} s vymazanou i -tou řádkou a j -tým sloupcem.

Inverzní matice \mathbf{M}^{-1} matice \mathbf{M} je transponovaná matice jejích minorů \mathbf{A}_{ij} dělených determinantem. Pokud je determinant nulový potom inverzní matice není definována ze zřejmého důvodu: Pokud dělíme malými čísly blízkými k nule, dostaneme neurčitá nekonečná čísla. To dává také odpověď na otázku, co je Váš inverzní prvek. Je to Váš minor. Tem závisí na vlastnostech světa, ve kterém žijete.

Například magická čtvercová matice a její inverzní matice

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = 1/360 \begin{pmatrix} -52 & 53 & 23 \\ 8 & -22 & 38 \\ 68 & -7 & -37 \end{pmatrix}$$

A praktické technika pro invertování matic má dva kroky:

- Nejprve se pravidelná matice rozloží do 3 matic

$$\mathbf{M} = \mathbf{LUP} \quad (16.5)$$

kde \mathbf{L} je maticí v dolní trojúhelníkové formě, \mathbf{U} je maticí v horní trojúhelníkové formě a \mathbf{P} je permutační matice.

- Je snadné nalézt odpovídající inverzní matice a inverzní matice je potom

$$\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}. \quad (16.6)$$

Násobení matice její inverzní maticí lze transformovat na úlohu dekompozice jejího determinantu podle její hrany nebo sloupce. Pokud řádka minorů se násobí transponovanou řádkou odpovídajících prvků matice, dostaneme determinant, poněvadž minory v inverzní matici se jím dělí, je poměr 1. Pokud se násobí nesouhlasící hrany, má to stejný účinek, jako kdyby matice měla dvě identické hrany a determinant daný tímto součinem je nulový.

16.3 Matice procházek a cest

Ukázali jsme, v jakém vztahu jsou prvky inverzní matice k minorům prvků matice. Avšak v některých případech se může odvodit tato inverzní matice přímo ze struktury grafů bez žádných zřejmých vztahů k minorům determinantu.

To je případ matic $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ nebo $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ stromů. Mají $(n - 1)$ hran a sloupců a jsou nesingulární, protože odpovídající kvadratické formy $\mathbf{S}^T\mathbf{S}$ a $\mathbf{G}^T\mathbf{G}$ mají právě jednu nulovou vlastní hodnotu. Ve stromu neexistuje žádný cykl, tedy existuje pouze jedna procházka mezi každým párem vrcholů (v případě neorientovaných grafů mluvíme o cestách). Může se definovat matice¹ \mathbf{W} s hranami odpovídajícími všem procházkám nebo cestám ve stromu, se sloupci představujícími orientované hrany nebo neorientované hrany. Prvky w_{ij} těchto matic jsou ± 1 pokud orientovaná hrana nebo neorientovaná hrana j je částí cesty nebo procházky, i jinak. Definice se komplikuje, zejména pro neorientované stromy, znaménky nutnými k eliminaci nežádoucích prvků, když matice procházek se násobí maticí $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$, jejíž všechny prvky jsou kladné. Orientované stromy mohou mít konfiguraci všech orientovaných hran hlava k ocasu, ponavádž stromy jsou dvojdielné grafy. Potom všechny mimodiagonální prvky $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ jsou záporné a všechny prvky \mathbf{W} kladné. Jinak w_{ij} má kladné znaménko, pokud hrana j je v sudé vzdálenosti od poslední hrany v procházce (cestě) nebo orientovaná hrana j má stejnou orientaci jako poslední orientovaná hrana, a má záporné znaménko, pokud odpovídající hrana je v liché vzdálenosti od poslední hrany, nebo odpovídající orientovaná hrana má opačnou orientaci jako poslední hrana.

Matice cest orientovaných lineárních řetězců vypadají jako Petrieovy matice úplných grafů (viz podkapitolu 13.3), pouze prvky obou matic mají rozdílnou interpretaci.

Pravé inverzní matice kvadratických forem $\mathbf{G}\mathbf{G}^T$ a $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ jsou $1/n$ násobky odpovídajících kvadratických forem $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$, matice $\mathbf{G}^T\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ a $\mathbf{S}\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ jsou pravými inverzními maticemi \mathbf{G} nebo \mathbf{S} , podobně jako $\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{G}$ a $\mathbf{W}^T\mathbf{W}\mathbf{S}$ jsou levými inverzními maticemi \mathbf{G} nebo \mathbf{S} . Diagonální prvky obou kvadratických forem počítají kolikrát odpovídající orientovaná hrana nebo neorientovaná hrana byla používána ve všech procházkách nebo cestách, mimodiagonální prvky počítají společné využití daného páru hran. Takto jednoduše získané čísla jsou současně minory odpovídající kvadratické formy incidenční matice. Stopa $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ je součet vzdáleností mezi vrcholy ve stromu. Je známá jako *Wienerovo číslo*, viz příští kapitulu.

Matice procházek a cest stromy zahrnují všechny procházky nebo cesty daného stromu, zatím co kódové matice stromů zahrnují pouze procházky (nebo cesty) z kořenu. U orientovaných stromů oba druhy matic jsou ve vztahu jako

$$\mathbf{C}\mathbf{S}_K^T = -\mathbf{W}^T. \quad (16.7)$$

Například

¹Pouze jeden symbol se používá pro obě matice pro úsporu.

$$\begin{array}{cccc|cccc}
& & & & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
& & & & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
& & & & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
& & & & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
1 & & & & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & & & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}$$

16.4 Inversní matice lichých neorientovaných cyklů.

Incidenční matice \mathbf{G} jednoduché neorientovaných cyklů C_{liche} má ve své kanonické formě v každé řádce dvě následné 1,

$$g_{ii} = 1, \quad g_{i,i+1} = 1 \text{ [pokud } i = (n+1) \text{ potom } i = 1, \quad g_{ij} = 0 \text{ jinak} . \quad (16.8)$$

Obě kvadratické formy je identické, jejich prvky jsou

$$g^T g_{ii} = 2, \quad g^T g_{i,i\pm 1} = 1 \text{ [pokud } i = (n+1) \text{ potom } i = 1 . \quad (16.9)$$

Začneme hledáním inverzní matice kvadratické formy matice cyklů $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$. Je snadné ji nalézt pro malé cykly, například pro 7 členný cyklus tato symetrická matice $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})$ začíná jako

$$\mathbf{G}^T \mathbf{G} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Její inverzní maticí $(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} = \mathbf{C}^T \mathbf{C}$ začíná jako

$$(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) \begin{pmatrix} -5 & 7 & -5 & 3 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -5 & 7 & -5 & 3 & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Tato matice je kvadratickou formou základní matice \mathbf{C} lichých cyklů, jejíž prvky jsou $c_{ij} = (-1)^{d(ij)}$. Horní $d(ij)$ indexy jsou vzdálenosti vrcholů j od diagonálního vrcholu i . Je tu k kladných prvků a $(k+1)$ záporných prvků v každé řádce a sloupci, například

$$\mathbf{C} \begin{pmatrix} +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 & +1 & -1 & -1 & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Poněvadž \mathbf{C} je symetrická

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} = \mathbf{C} \mathbf{C}^T = \mathbf{C}^2. \quad (16.10)$$

V kvadratických formách znaménka sousedních prvků jsou vždy opačná a difference jejich hodnot je vždy 2. Tedy, když se násobí $\mathbf{C}^T \mathbf{C}$ s $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$, dostaneme pro diagonální prvky

$$1 \times (2 - n) + 2 \times na + 1 \times (2 - n) = 4.$$

Pro mimodiagonální prvky dostaneme

$$1 \times [2(k - 1) - n] + 2 \times (n - 2k) + 1 \times [2(k + 1) - n] = 0.$$

Podobný výsledek se získá také pro prostřední prvky $\pm(1, 1, -3)$ nebo $\pm(-3, 1, 1)$. Matice cyklů \mathbf{C} má požadovanou vlastnost matice cyklů, totiž $\mathbf{C} \mathbf{G} \equiv \mathbf{0} \pmod{2}$. Sousední prvky jsou většinou (± 1) a pokud mají stejné znaménko, potom jejich součet je 2. Součin je $2\mathbf{P}$, kde \mathbf{P} je jednotková permutační matice cyklu. Příští součin je

$$\mathbf{C} \mathbf{G} \mathbf{G}^T = 2(\mathbf{P} + \mathbf{P}^T).$$

Tento výsledek se bude interpretovat v termínech kolinearity a ortogonality později.

Tyto vlastnosti částečných součinů nám dovolují definovat pseudoinverzní matice \mathbf{G} a \mathbf{G}^T z obou stran

$$\mathbf{G}^{-1} \text{ zprava} = 1/4 \mathbf{G}^T \mathbf{C}^2 = \pm 1/2 \mathbf{C} \mathbf{P}^T \quad (16.11)$$

$$\mathbf{G}^{-1} \text{ zleva} = 1/4 \mathbf{C}^2 \mathbf{C}^T = \pm 1/2 \mathbf{P}^T \mathbf{C}. \quad (16.12)$$

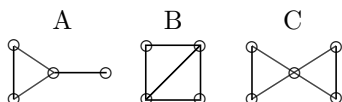
Permutační matice \mathbf{P}^T má jednotkové prvky $p_{i, i+(n-1)/2}$. Pokud násobí matici \mathbf{C} zprava, permutuje její sloupce, pokud zleva, permutuje její hrany. Poněvadž matice \mathbf{C} je symetrická, výsledky obou permutací jsou identické a incidenční matice neorientovaného lichého cyklu má pravou inverzní matici. Mimo to, pokud matice cyklu působí na kvadratickou formu $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ z obou stran, také ji diagonalizuje:

$$\mathbf{C} \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{C} = 4 \mathbf{I}.$$

16.5 Inverzní matice neorientovaných cyklických grafů

Existence inverzních matic kvadratické formy incidenční matice jednoduchých neorientovaných cyklů budí zájem o možnosti nalézt inverzní matice těchto kvadratických forem incidenčních matic cyklických grafů. Z obou kvadratických forem $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ a $\mathbf{G} \mathbf{G}^T$ pouze matice menšího rozměru může mít inverzní matici.

Figure 16.1: Příklady neorientovaných nesingulárních cyklických grafů



To znamená, že pro grafy s dvěma nebo více cykly pouze forma $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ může být nesingulární, protože $\mathbf{G} \mathbf{G}^T$ je vyššího rozměru.

Některé příklady neorientovaných cyklických grafů majících inverzní matice kvadratických forem se snadno našly (obr. 16.1). Graf A má inverzní matici obou kvadratických forem

$$\begin{array}{cc}
 \mathbf{G}^T \mathbf{G} & 4\mathbf{G}^T \mathbf{G}^{-1} \\
 \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 3 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 7 \end{array} \right) \\
 \mathbf{G} \mathbf{G}^T & 2(\mathbf{G} \mathbf{G}^T)^{-1} \\
 \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Graf B

$$\begin{array}{cc}
 \mathbf{G}^T \mathbf{G} & 4(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \\
 \left(\begin{array}{cccc} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array} \right)
 \end{array}$$

Graf C

$$\begin{array}{cc}
 \mathbf{G}^T \mathbf{G} & 24(\mathbf{G}^T \mathbf{G})^{-1} \\
 \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccccc} 17 & -7 & -3 & 1 & 1 \\ -7 & 17 & -3 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 9 & -3 & -3 \\ 1 & 1 & -3 & 17 & -7 \\ 1 & 1 & -3 & -7 & 17 \end{array} \right)
 \end{array}$$

16.6 Zobecněné Inverze Laplace-Kirchhoffových matic

Laplace-Kirchhoffovy matice jsou pojmenované podle dvou proslulých vědců. Laplace vyřešil s použitím těchto matic pohyb nebeských těles, Kirchhoff vyřešil s použitím těchto matic pohyb elektronů v elektrických obvodech. Laplace-Kirchhoffovy matice jsou matice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$. Mají kladné diagonální prvky a záporné mimodiagonální prvky, které jsou vyváženy jako

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{J} = \mathbf{0}; \mathbf{J}^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{0}. \quad (16.13)$$

Laplace-Kirchhoffovy matice mají jednu nulovou vlastní hodnotu. Tu lze odstranit, pokud přidáme nebo odečteme od Laplace-Kirchhoffovy matice násobek k jednotkové matice $k \mathbf{J} \mathbf{J}^T$. Potom můžeme nalézt inverzní matici. Pokud přidáme nebo odečteme od ní opět násobek jednotkové matice $k \mathbf{J} \mathbf{J}^T$, dostaneme zobecněnou inverzní matici s vlastnostmi:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} [(\mathbf{S}^T \mathbf{S} + k \mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} + k \mathbf{J} \mathbf{J}^T] = n \mathbf{I} - \mathbf{J} \mathbf{J}^T \quad (16.14)$$

Například

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{S}^T \mathbf{S} & (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{J} \mathbf{J}^T) & (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{array} \right) \\ & (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{J} \mathbf{J}^T)^{-1} + \mathbf{J} \mathbf{J}^T & \\ & \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{array} \right) & \end{array}$$

To je možné poněvadž jednotkový vektor \mathbf{J} je nulovým vlastním vektorem matice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$. Vzpomeňte si, že $n \mathbf{I} - \mathbf{J} \mathbf{J}^T$ je Laplace-Kirchhoffova matice úplného grafu K_n .

Mezi nekonečně mnoha zobecněnými inverzními maticemi každé matice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ existuje speciální zobecněná inverzní matice, která se získá Moebiusovou inverzí matice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$.

Hlavní podmatice $\delta_j \mathbf{S}^T \mathbf{S}$, kde je vypuštěna j -tá řádka a j -tý sloupec, jsou nesingulární a mají inverzní matice. Pokud se tyto inverzní matice sečtou s ponecháním prázdné j -té řádky a sloupce, dostaneme *Eichingerovy matice* \mathbf{E} , které také mají vlastnosti zobecněných inverzních matic:

$$\mathbf{E} = \sum_{j=1}^n \delta_j \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (16.15)$$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{E} = n\mathbf{I} - \mathbf{J}\mathbf{J}^T. \quad (16.16)$$

Například jako shora

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{S}^T \mathbf{S} & (\delta_1(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}) & (\delta_2 \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} & (\delta_3 \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{E} & & & \\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} & & & \end{array}$$

Vlastní hodnoty Eichingerových matic jsou inverzní vlastní hodnoty původní Laplace-Kirchhoffovy matice vyjma vlastní hodnotu odpovídající nulové vlastní hodnotě. Tato vlastní hodnota je rovná součtu ostatních $(n - 1)$ vlastních hodnot.

16.7 Technika zakořenění

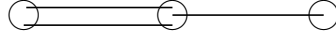
V kapitole 13 jsme ukázali, že incidenční matice stromů jsou nesingulární, a že mají inverzní matice $(\mathbf{S}^*)^{-1}$, kódové matice \mathbf{C} .

Zakořenění odstraňuje singularitu nejen matice stromů ale všech grafů. Důkaz je induktivní a je formulovaný pro pravou inverzní matici. Matice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ je nulová matice jakékoliv Laplace-Kirchhoffovy matice, poněvadž jednotkový sloupec je jejím nulovým vlastním vektorem. Avšak matice $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ přidává na místo perturbace 1 v dané řádce a nuly v odpovídajícím sloupci. Kořenová řádka musí být vyvážená. V jiných řádkách je jednotkový sloupec nulovým vlastním vektorem, 1 na diagonále je vyvolána dalšími prvky částečné inverzní matice. Poněvadž Laplace-Kirchhoffova matice je symetrická, součin částečné inverzní matice se zápornými mimodiagonálními prvky kořenové řádky musí dávat -1. To nechává nuly jako mimodiagonální prvky.

V předchozí sekci byla ukázána Moebiusova inverzní matice Laplace-Kirchhoffovy matice. To vyžaduje invertování n submatic. Je dostačující odstranit singularitu Laplace-Kirchhoffovy matice zakořeněním pouze jednoho vrcholu, jednoduše přičtením 1 (nebo jakéhokoliv čísla) k jednomu jejímu diagonálnímu prvku:

$$(\delta_j \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} + \mathbf{J}\mathbf{J}^T = (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + 1_{jj})^{-1}. \quad (16.17)$$

Například



$$(\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{1}_{11})_{C_4} \quad (\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{1}_{11})_{C_4}^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 7/4 & 6/4 & 5/4 \\ 1 & 6/4 & 8/4 & 6/4 \\ 1 & 5/4 & 6/4 & 7/4 \end{pmatrix}.$$

Váha orientovaných hran se snížila pro cykly C_n . Inverzní maticí difference $(\delta_1 \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}$ je vždy matice $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$ lineárního řetězce L_n , jehož inverzní maticí je kvadratická forma $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$ matice cest. řetězec tvoří napínací strom. Jeho čtvercová matice se musí rozložit do trojúhelníkového tvaru a přidat k matici $\mathbf{J} \mathbf{J}^T$. Poněvadž $\mathbf{W}^T \mathbf{W}$, jak byly definovány, dávají $n\mathbf{I}$ jako součin s $\mathbf{S} \mathbf{S}^T$, je nutné dělit n . Jako příklad trojúhelníková dekompozice

$$\mathbf{W}^T$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} \quad \text{Trojúhelníková dekompozice}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3/4} & 0 & 0 \\ \sqrt{1/3} & \sqrt{2/3} & 0 \\ \sqrt{1/12} & \sqrt{1/6} & \sqrt{1/2} \end{pmatrix}$$

Když prvky matice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ se interpretují jako *vodivosti*, potom prvky inverzní matice jsou *odpory* (nebo odporové vzdálenosti). Dva sousedící vrcholy jsou spojené v kružnici C_n dvěma způsoby, buď přímo spojující orientovanou hranou, nebo cestou $(n-1)$ orientovaných hran. Pokud všechny orientované hrany mají odpor 1, potom vodivost obou spojení je 1 a $1/(n-1)$. Vodivost obvodu je $n/(n-1)$, v našem příkladě $4/3$. Dvě cesty mezi opačnými vrcholy v sudých cyklech mají odpory $n/2$, jejich spojená vodivost je $4/n$, v našem příkladě 1.

Technika zakořenění u stromů dává stejný výsledek jako kódové matice. Násobnost k orientovaných hran se může vyjádřit jako opakování hrany nebo vážení orientovaných hran. Tyto váhy v incidenční matici musí být odmocninami násobnosti k orientované hrany.

Elementární výpočty ukazují, že násobnost k orientovaných hran snižuje kód vrcholu, do kterého jde orientovaná hrana, jako $1/k$. Například strom

má tři kódy odpovídající kořenům 1, 2, 3:

$$\begin{array}{ccc}
\text{Kořen 1} & \text{Kořen 2} & \text{Kořen 3} \\
\left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \sqrt{1/2} & 0 \\ 1 & \sqrt{1/2} & 1 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{1/2} \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \sqrt{1/2} \end{array} \right) .
\end{array}$$

16.8 Vztahy Spekter grafů a komplementárních grafů

Charakteristické polynomiály Laplace-Kirchhoffových matic lze nalézt stejnou technikou jako charakteristické polynomiály matic sousedství, to je indexováním charakteristických obrázků, ve kterých stupně vrcholů v_j představují smyčky nebo technikou La Verrier-Fadějev-Frameovou.

Součet inverzní matice Laplace-Kirchhoffovy submatice $(\delta \mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}$ tvoří zobecněnou inverzní matici \mathbf{E} Laplace-Kirchhoffovy matice dávající jako součin Laplace-Kirchhoffovy matice úplného grafu $\mathbf{S}^T \mathbf{S}_K$:

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} \mathbf{E} = \mathbf{S}^T \mathbf{S}_K . \quad (16.18)$$

Zobecněná inverzní matice \mathbf{E} Laplace-Kirchhoffovy matice je identická s maticí \mathbf{B}_{n-2} La Verrier-Fadějev-Frameovy techniky

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})_n - a_1 (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{n-1} , \quad (16.19)$$

kde a_1 je koeficient charakteristického polynomiálu a matice $(\mathbf{S}^T \mathbf{S})_n = (\mathbf{S}^T \mathbf{S}) \mathbf{B}_{n-1}$. Frameovy matice \mathbf{B} se získají jako $\mathbf{B}_n = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})_n - a_n \mathbf{I}$. Poslední Frameova matice je $\mathbf{B}_n = (\mathbf{S}^T \mathbf{S}_n - a_n \mathbf{I}) = \mathbf{0}$. To znamená, že

$$\mathbf{B}_{n-1} = 1/a_{n-1} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1} . \quad (16.20)$$

U Laplace-Kirchhoffovy matice $a_n = 0$, tedy $(\mathbf{S}^T \mathbf{S})_n = \mathbf{0}$. Tedy $\mathbf{B}_{n-1} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})^{-1}$, a $a_{n-1} = n$. Z toho plyne, že

$$\mathbf{E} = \mathbf{B}_{n-2} \text{ a } \{\mathbf{E}(\mathbf{S}^T \mathbf{S})^2 = n \mathbf{S}^T \mathbf{S} . \quad (16.21)$$

Mimo to, pokud Laplace-Kirchhoffova matice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}_K$ grafu G_n se násobí $(\mathbf{E} - \mathbf{I})$, získá se Laplace-Kirchhoffova matice doplňkového grafu \overline{G} . Z těchto výsledků plyne vztah vlastních hodnot λ_j odpovídající Laplace-Kirchhoffovy matice:

$$\mathbf{E}(\lambda_j) = \mathbf{S}^T \mathbf{S}(n/\lambda_j) \text{ a } \mathbf{S}^T \mathbf{S}(\overline{G})(\lambda_j) = \mathbf{S}^T \mathbf{S}(G)(n - \lambda_j) . \quad (16.22)$$

Vlastní hodnoty Laplace-Kirchhoffových matic párů komplementárních grafů musí být komplementární, aby jejich součty daly vlastní hodnoty úplného grafu K_n . Například hvězda S_n je doplňkovým grafem úplného grafu K_{n-1} . Její spektrum je $[n, 1^{n-2}, 0]$, což je doplňkem ke spektru $[0, (n-1)^{n-2}, 0]$ Laplace-Kirchhoffovy matice úplného grafu s $(n-1)$ vrcholy.

16.9 Součiny Laplace-Kirchhoffových matic

Dva grafy se považují za ekvivalentní, pokud jejich matice mohou být vzájemně transformované symetrickými permutacemi s jednotkovými permutačními maticemi \mathbf{P} : $\mathbf{M}_{G_i} = \mathbf{P}\mathbf{M}_{G_j}\mathbf{P}^T$. Vystává zajímavý problém: V jakém vztahu jsou vlastní hodnoty odpovídajících matic při takových operacích. Je obvyklé uspořádat vlastní hodnoty v vzestupném nebo snižujícím se uspořádání, avšak pokud se matice permutuje, potom by se také měly její vlastní hodnoty permutovat, aby se dostaly rozdílné součiny a tedy nemohou být ve všech ekvivalentních grafech uspořádány podobně jako v kanonické formě v vzestupném nebo klesajícím pořádku.

To znamená, že lze definovat *orbitu vlastních hodnot*, jejíž objem je určen násobnostmi vlastních hodnot.

Když násobíme Laplace-Kirchhoffovy matice dvanácti rozdílně označených lineární řetězců L_4 , dostaneme 3 rozdílné výsledky v závislosti na počtu společných orientovaných hran a dané permutaci. Z těchto tří se zajímáme o dva extrémní případy:

$$\text{3 společné orientované hrany} \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Stopa je součtem čtverců vlastních hodnot $(2+2^{1/2})^2 + 2^2 + (2-2^{1/2})^2 = 16$.

$$\text{žádná společná orientovaná hrana} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

L_4 je samo se doplňující graf a v součinu dvou samo se doplňujících grafů se vlastní hodnoty jsou násobí v opačném uspořádání jako vlastní hodnoty ve čtverci

| | | | | |
|--------------------|---------------|---|---------------|---|
| Spektrum (L_4) | $2 + 2^{1/2}$ | 2 | $2 - 2^{1/2}$ | 0 |
| Spektrum (L_4) | $2 - 2^{1/2}$ | 2 | $2 + 2^{1/2}$ | 0 |
| Spektrum (C_4) | 2 | 4 | 2 | 0 |

Matice součinu je Laplace-Kirchhoffova matice cyklu C_4 a její vlastní hodnoty nejsou uspořádané, poněvadž samotný cykl je permutovaný ze své standardní formy.

Výsledek lze formulovat jako teorému: Pokud se Laplace-Kirchhoffova matice grafu s jednoduchými orientovanými hranami násobí Laplace-Kirchhoffovou maticí svého doplňkového grafu, vlastní hodnoty součinu matic jsou vlastními hodnotami původní Laplace-Kirchhoffova matice násobené vlastními hodnotami jejího doplňkového grafu vzatými v inverzním uspořádání, vyjma nulovou vlastní hodnotu.

Důkaz: Z doplňkových vlastností obou Laplace-Kirchhoffova matic plyne, že jejich mimodiagonální prvky tvořící matice sousedství \mathbf{A} nemají žádný účinek na stopu součinu, $Tr[\mathbf{A}(G)\mathbf{A}(\overline{G})] = 0$. Tedy diagonální prvky součinu jsou $v_j[(n-1) - v_j]$ a současně stopa je podle teorému součtem vlastních hodnot součinů $\lambda_j(n - \lambda_j)$:

$$Tr(\mathbf{S}^T \mathbf{S} \overline{\mathbf{S}^T \mathbf{S}}) = \sum_{j=1}^n [(n - v_j) - v_j^2] = \sum_{j=1}^n [(n\lambda_j - \lambda_j^2)] \quad (16.23)$$

Stopa Laplace-Kirchhoffovy matice se současně rovná součtu stupňů vrcholů Σv_j a součtu vlastních hodnot $\Sigma \lambda_j$ a stopa čtverce Laplace-Kirchhoffova matice s jednoduchými orientovanými hranami je

$$Tr([\mathbf{S}^T \mathbf{S}]^2) = \sum_{j=1}^n (v_j^2 + v_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j^2, \quad (16.24)$$

tedy

$$Tr(\mathbf{S}^T \mathbf{S} \overline{\mathbf{S}^T \mathbf{S}}) = nTr(\mathbf{S}^T \mathbf{S}) - Tr([\mathbf{S}^T \mathbf{S}]^2). \quad (16.25)$$

Vycházejí z doplňkového grafu a jeho Laplace-Kirchhoffovy matice a vložením $(n-1 - v_j)$ dostaneme stejný výsledek.

Důkaz využil vlastností grafových matic s jednoduchými orientovanými hranami, avšak vztah mezi vlastními hodnotami platí také pro multigrafy a jejich komplementární grafy, jak se vypočítá ze vztahu

$$\overline{\mathbf{S}^T \mathbf{S}} = \mathbf{S}^T \mathbf{S} (\mathbf{E} - \mathbf{I}). \quad (16.26)$$

To je difference

$$\overline{\mathbf{S}^T \mathbf{S}} = (\mathbf{S}^T \mathbf{S})_K - \mathbf{S}^T \mathbf{S}. \quad (16.27)$$

Například

| | | | | $\overline{\mathbf{S}^T \mathbf{S}}$ | | |
|---|-------------------|----|----------------|--------------------------------------|----|----|
| | | | | -1 | 1 | 0 |
| | | | | 1 | 0 | -1 |
| | | | | 0 | -1 | 1 |
| $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ | 3 | -2 | -1 | -5 | 4 | 1 |
| | -2 | 2 | 0 | 4 | -2 | -2 |
| | -1 | 0 | 1 | 1 | -2 | 1 |
| Spektrum $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ | $3 + 3^{1/2}$ | | $3 - 3^{1/2}$ | 0 | | |
| Spektrum $\overline{\mathbf{S}^T \mathbf{S}}$ | $-3^{1/2}$ | | $3^{1/2}$ | 0 | | |
| Spektrum $\mathbf{S}^T \mathbf{S} \overline{\mathbf{S}^T \mathbf{S}}$ | $-(3 + 27^{1/2})$ | | $27^{1/2} - 3$ | 0 | | |

Důkaz lze zjednodušit s použitím formální notace:

$$[\mathbf{S}^T \mathbf{S}]^2 + \overline{\mathbf{S}^T \mathbf{S}} = \mathbf{S}^T \mathbf{S} \quad (16.28)$$

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \overline{\mathbf{S}^T \mathbf{S}}) = \mathbf{S}^T \mathbf{S} (\mathbf{S}^T \mathbf{S})_K = \quad (16.29)$$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{S} (n\mathbf{I} - \mathbf{J}\mathbf{J}^T) = \quad (16.30)$$

$$n\mathbf{I}\mathbf{S}^T \mathbf{S} + \mathbf{0} = n\mathbf{S}^T \mathbf{S} . \quad (16.31)$$

Nebo

$$Sp(\lambda_j^2 + \lambda_j[n - \lambda_j]) = nSp(\lambda_j) . \quad (16.32)$$

Jednotkový vektor-sloupec \mathbf{J} nebo jednotkový vektor-řádka \mathbf{J}^T jsou nulovými vlastními vektory Laplace-Kirchhoffových matic všech grafů a Laplace-Kirchhoffovy matice všech subgrafů úplného grafu K_n nejsou ortonormální vlastní vektory své Laplace-Kirchhoffovy matice.

Důsledkem vlastností součinů vlastních hodnot je, že spektra samo se doplňujících grafů (jejich Laplace-Kirchhoffových matic) musí být symetrická, vyjma jejich nulovou vlastní hodnotu:

$$n/2 \pm (-\lambda_j n/2) . \quad (16.33)$$

16.10 Systémy lineárních rovnic

Soustavu n rovnic s n neznámými lze zapsat v maticové formě jako

$$\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b} . \quad (16.34)$$

Matice koeficientů se násobí vektorem sloupce \mathbf{x} a dává vektor sloupce \mathbf{b} . Soustava rovnic má řešení, pokud matice \mathbf{M} není singulární. Potom

$$\mathbf{x} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{b} . \quad (16.35)$$

Nalezneme inverzní matici a jejím násobením s vektorem \mathbf{b} bychom měli dostat neznámé.

Jinou možností, jak vyřešit soustavu v případě, že matice \mathbf{M} není singulární a její determinant není nulový, je Cramerova technika. Konstruujeme blokovou matici ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{b} \\ \mathbf{J} & \Sigma x_j \end{pmatrix} . \quad (16.36)$$

Poslední sloupec této matice s $m = (n + 1)$ řádkami a sloupce je lineární kombinace prvních n sloupců. Váhy jsou dané prvky vektoru \mathbf{x} . To platí také pro m -tou řádku. Determinant blokové matice je nula a tedy, když jej rozvineme podle poslední řádky dostaneme

$$\Sigma x_j = \Sigma A_{mj} / \det(M) . \quad (16.37)$$

A_{mj} je minor. Prvky x_j jsou jednoduše odpovídající podíly determinantů. Nevýhodou této techniky je, že vyžaduje mnoho výpočtů. Jiná nevýhoda není obvykle zřejmá.

Pokud každé řádka má svůj vlastní vektor vah nebo pokud vektor \mathbf{b} se kombinuje s vektorem chyb, potom vektor \mathbf{x} může být daleko od všech vektorů \mathbf{x}_j . Například matice

$$\begin{pmatrix} 12 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 14 & 5 & 5 & 3 & 2 \\ 14 & 5 & 5 & 4 & 1 \\ 16 & 6 & 6 & 6 & 3 \\ 16 & 6 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

má dobře definovanou inverzní maticí a dává pro vektor $\mathbf{b} = (32, 46, 45, 64, 62)^T$ jako řešení vektor $\mathbf{x} = (1, 1, 2, 3, 4)^T$. Zavedením vektoru chyb $\mathbf{r} = (2, 0, 0, 0, 0)^T$, který dává vektor $\mathbf{b} = (34, 46, 45, 64, 62)^T$, vektor \mathbf{b} se změní na $(8.5, -24, 4, 5, 6)^T$. To znamená, že malá chyba indukovala chybu vkládaného vektoru $(7.5, -25, 2, 2, 2)^T$, která úplně deformovala správný vektor, nebo málo změněný zvláštní vektor \mathbf{x} deformoval výsledek pro celý svazek s identickými vektory. Tato vlastnost vektorových systémů je velmi nešťastná, protože nemůžeme být jisti, pokud neznáme přesné hodnoty, pouze s použitím přibližných hodnot, že naše rekonstrukce odpovídá původním hodnotám.

Chapter 17

Matice vzdáleností

17.1 Úvod

Vzdálenosti už byly zmíněné, avšak nyní jejich matice budou studovány systematicky, s použitím všech nich znalostí.

Můžeme se pohybovat mezi dvěma body i a j po rozdílných cestách. Délky cest závisí na okolnostech, jako na dostupnosti cest, nebo prostředcích transportu. Délka cesty mezi body i a j je *vzdálenost* d_{ij} .

Topologické matice vzdáleností \mathbf{D} jsou definovány jako matice, jejichž mimodiagonální prvky jsou vzdálenosti d_{ij} . Tyto prvky počítají počet orientovaných hran (neorientovaných hran) mezi vrcholy i a j v grafu. To je nejmenší počet hran nebo orientovaných hran, které se musí projít na procházce nebo cestě mezi oběma vrcholy. To je důležité v grafech s cykly, kde existuje více procházek nebo cest. Vzdálenosti mezi nespojitými bloky jsou definované jako nekonečné.

Takové matice vzdáleností se používaly k charakterizaci grafů v teorii grafů a nikdo se nestaral, jaký je význam vzdáleností získaných jednoduchým počítáním hran. Pak se zavedly matice vzdáleností měřící euklidovské geometrické vzdálenosti odpovídajících vrcholů a zavedly se také v chemii matice s recipročními hodnotami vzdáleností.

Topologická matice vzdáleností \mathbf{D} grafu má stejné jednotkové prvky jako jeho matice sousedství \mathbf{A} . Obě matice se získají stejnou operací popsanou v podkapitole 12.8 z matice koordinát.

Problém se demonstruje na příkladě koordinát čtyř bodů na vrcholech pravidelného čtyřstěnu, nataženého přímo na osy nebo navinutého cik-cak na jednotkovou krychli. Existují tři odpovídající kvadratické formy tří matic koordinát $\mathbf{C}\mathbf{C}^T$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{I}^2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \mathbf{C} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Při násobení kvadratických forem těchto matic koordinát s rámečkem $\mathbf{S}^T(*)\mathbf{S}$, kde \mathbf{S}^T je maticí

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

naleznou se vzdálenosti (rozdíly koordinát) mezi čtyři body v rozdílné konfiguraci. Tyto vzdálenosti se objeví jako *diagonální prvky* odpovídajících součinů. Jsou to $(2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $(1, 4, 1, 9, 4, 1)$ a $(1, 2, 1, 3, 2, 1)$. Ve všech případech tato čísla jsou čtverce euklidovských vzdáleností.

Tyto diagonály $\Delta_D n(n-1)/2$ vzdáleností se redukují do n rozměrné čtvercové matice orámováním incidenční maticí úplného grafu

$$\mathbf{S}^T \Delta_D \mathbf{S} = \mathbf{Q} - \mathbf{D}, \quad (17.1)$$

kde \mathbf{Q} je diagonální matice řádkových nebo sloupcové součtů prvků vzdáleností vrcholu i ke všem jiným vrcholům. Záporné mimodiagonální prvky ukazují vzdálenosti mezi odpovídajícími páry vrcholů:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 13 & -1 & -4 & -9 \\ -1 & 6 & -1 & -4 \\ -4 & -1 & 6 & -1 \\ -9 & -4 & -1 & 13 \end{pmatrix} \end{array}$$

C

$$\begin{pmatrix} 6 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Prvá matice **A** je identická s Laplace-Kirchhoffovou maticí úplného grafu K_4 . Druhá matice **B** odpovídá čtvercům Euklidovských vzdáleností mezi koordinátami číselné osy. Mimodiagonální prvky třetí matice **C** jsou identické s topologickou maticí vzdáleností L_4 .

17.2 Vlastnosti matice vzdáleností

Topologické matice vzdáleností **D** stromů mají zajímavou vlastnost. Byla objevena dosti nedávno Rutherfordem. Zjistil, že **D** je vnitřní inverzní maticí kvadratické formy incidenční matice

$$\mathbf{SDS}^T = -2\mathbf{I}. \quad (17.2)$$

Rozměrnost matice vzdáleností je snížena tímto orámováním na rozměrnost množiny orientovaných hran $(n-1)$. Prvky prvního součinu, například \mathbf{DS}^T , jsou rozdíly vzdáleností $(BJ - BK) - (AJ - AK)$. Tato diference u acyklických grafů je jen vzdáleností mezi vrcholy spojenými jednou orientovanou hranou, to znamená, že je ± 1 , podle orientace orientované hrany. V druhém součinu dostaneme opět diference. Výsledkem je druhá diference, která je záporná.

Interpretujeme toto schéma diferencí jako symptom ortogonality $(n-1)$ orientovaných hran ve stromech. Schéma diferencí se všemi orientovanými hranami v úplném grafu

$$\mathbf{S}_K \mathbf{DS}_K^T \quad (17.3)$$

určuje polohy vrcholů v prostoru. Příklady matic vzdáleností shora dávají následující rozdíly

A

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

B

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 & -6 & -4 & -2 \\ -4 & -8 & -4 & -12 & -8 & -4 \\ -2 & -4 & -2 & -6 & -4 & -2 \\ -6 & -12 & -6 & -18 & -12 & -6 \\ -4 & -8 & -4 & -12 & -8 & -4 \\ -2 & -4 & -2 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

C

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & -6 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Analýza schémat diferencí ukazuje, že diagonální prvky jsou dvojnásobky délek odpovídajících orientovaných hran. Mimodiagonální prvky se interpretují jako kosiny úhlů mezi odpovídajícími orientovanými hranami:

$$\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc. \quad (17.4)$$

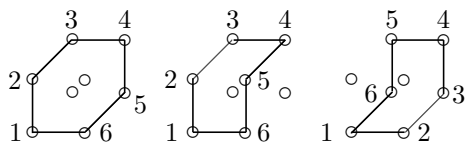
Po normalizaci diagonálních prvků dostaneme v případě A na diagonále 1. Mimodiagonální prvky jsou 1, 0, -1. Když se dělí $2 \times 1 \times 1$ dají 0.5, 0, -0.5. Tyto hodnoty jsou kosiny 60° , 90° a 120° . To jsou úhly mezi hranami v pravidelném čtyřstěnu.

Po normalizaci diagonálních prvků dostaneme v případě B na diagonále vzdálenosti 1, 4 a 9. Jejich odmocniny jsou 1, 2 a 3, vzdálenosti na přímce. Mimodiagonální prvky jsou -2, -4, -6, -8, a -12. Když se dělí odpovídajícími diagonálními prvky jako $2 \times 1 \times 1$, $2 \times 1 \times 2$, $2 \times 1 \times 3$, $2 \times 2 \times 2$ a $2 \times 2 \times 3$, podíl je vždy 1. To je kosinus 0° , všechny vzdálenosti mezi body jsou kolineární. To odpovídá konfiguraci přímky.

V případě B dostaneme na diagonále po normalizaci diagonálních prvků 1, 2 a 3. Jedna je strana krychle, odmocnina 2 je diagonála její strany a odmocnina 3 je její vnitřní diagonála. Mimodiagonální prvky jsou 0, -2, a -4. Jsou děleny odpovídajícími diagonálními prvky jako $2 \times 1 \times \sqrt{2}$, $2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ a $2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3}$. To jsou kosiny 35.26° , 45° a 90° . To jsou úhly mezi orientovanými hranami v 3 rozměrné krychli, jak je potřeba.

17.3 Uložení grafů

Pokud interpretujeme vzdálenosti přes orientované hrany jako čtverce euklidovských geometrických vzdáleností, potom můžeme studovat konfigurace grafů

Figure 17.1: Tři umístění cyklu C_6 

uložených do grafového prostoru. Tři konfigurace lineárního řetězce už byly zmíněné.

Topologické konfigurace stromů se získají z kódové matice a všechny orientované hrany ve stromech jsou ortogonální.

Konformace cyklů se sudým počtem vrcholů jsou zajímavé. Cykl C_4 tvoří čtverec, každá z jeho čtyř orientovaných hran je ortogonální se svými oběma sousedkami a kolineární se čtvrtou orientovanou hranou

$$\begin{array}{cc} \mathbf{D}_{C_4} & \mathbf{SD}_{C_4} \mathbf{S}^T \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{array} \right) . \end{array}$$

Cykl C_4 ohnutý na pravidelný čtyřstěn s maticí vzdáleností odpovídající matici vzdáleností úplného grafu K_4 dává jiné maticové úhly. Sousedící orientované hrany tvoří 60-stupňové úhly a každá orientovaná hrana je ortogonální ke své protilehlé orientované hraně. Ty tvoří pár, který nemá žádný společný vrchol.

$$\begin{array}{cc} \mathbf{D}_{K_4} & \mathbf{SD}_{K_4} \mathbf{S}^T \\ \left(\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccc} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array} \right) . \end{array}$$

Existují tři umístění cyklu C_6 na vrcholy 3 rozměrné krychle. Prvé je identické s obvyklou topologickou maticí vzdáleností vede ke třem kolineárním pářům ortogonálních orientovaných hran

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{D}_{C_6} & \mathbf{SD}_{C_6} \mathbf{S}^T \\
\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccccc} -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)
\end{array}$$

Dva jiné tvary C_6 mají některé vzdálenosti kratší a vedou k jinému uspořádání kolineárních orientovaných hran.

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{D}_{C_6} & \mathbf{SD}_{C_6} \mathbf{S}^T \\
\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccccc} -2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right).
\end{array}$$

Kolineární orientované hrany v třetí konformaci C_6 jsou (1-2 – 4-5), (2-3 – 1-6) a (3-4 – 5-6).

Rovinných konformace C_6 má následující matici a výslednou matici úhlů mezi vazbami

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{D}_{C_6} & \mathbf{SD}_{C_6} \mathbf{S}^T \\
\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 3 & 4 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{cccccc} -2 & -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right)
\end{array}$$

kde úhly jsou 120° , 60° , 180° , 300° a 240° .

Liché cykly mají každou orientovanou hranu ortogonální ke svým sousedům na obou stranách, avšak pár jejích protilehlých hran tvoří k ní 60° . Tato konformace se získá otočením dvou následných pravých úhlů o 60° k dané orientované hraně. Výsledek se objeví u orientované hrany uzavírající cykl.

$$\begin{array}{cc}
\mathbf{D}_{C_7} & \mathbf{SD}_{C_7}\mathbf{S}^T \\
\left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right) & \left(\begin{array}{ccccccc} -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right)
\end{array}$$

Matice vzdáleností úplných grafů K_n se mohou vyjádřit jako $\mathbf{D} = n\mathbf{J}\mathbf{J}^T - \mathbf{I}$. Součin je $\mathbf{S}\mathbf{J}\mathbf{J}^T\mathbf{S}^T = \mathbf{0}$. Tedy

$$\mathbf{SD}_K\mathbf{S}^T = -\mathbf{S}\mathbf{S}^T. \quad (17.5)$$

Vnější součin incidenční matice grafu s jednoduchými orientovanými hranami má na diagonále 2. Mimodiagonální prvky jsou buď 0, pokud orientované hrany nemají jakýkoliv společný vrchol, nebo 1, pokud se dvě orientované hrany stýkají ve vrcholu. Kosinus 60° je 0.5. Tedy v úplných grafech se objevují rovnostranné struktury. K_3 je rovnostranný trojúhelník, K_4 je rovnostranný čtyřstěn. šest orientovaných hran rovnostranného čtyřstěnu tvoří tři páry ortogonálních orientovaných hran.

Kvadratické formy úplných grafů se mohou formulovat v blokové formě s postupným použitím $(n-1)$ úplného grafu a jednotkových vektorů

$$\begin{array}{cc|cc}
& & \mathbf{S}^T & -\mathbf{I} \\
& & \mathbf{0} & \mathbf{J}^T \\
\hline
\mathbf{S} & \mathbf{0} & \mathbf{S}\mathbf{S}^T & -\mathbf{S} \\
-\mathbf{I} & \mathbf{J} & -\mathbf{S}^T & \mathbf{I} + \mathbf{J}\mathbf{J}
\end{array}$$

Při zvětšování rozměru úplného grafu se bude objevovat $(n-3)$ ortogonálních orientovaných hran ke každé původní orientované hraně.

Když vložíme matici vzdáleností hvězdy zakořeněné v n -tém vrcholu do $\mathbf{S}\mathbf{S}^T$ úplného grafu, potom dostaneme pro graf hvězdy součin

$$\mathbf{S}_K\mathbf{D}\mathbf{S}_K^T = \begin{pmatrix} 2\mathbf{S}\mathbf{S}^T & -2\mathbf{S} \\ -2\mathbf{S} & -2\mathbf{I} \end{pmatrix} \quad (17.6)$$

Orientované hrany hvězdy jsou ortogonální. orientovaných hran spojující své volné vrcholy mají dvojitě délky (na diagonále se objevují čtyřky). Tyto orientované hrany jsou diagonály odpovídajících čtverců. To lze zkontrolovat výpočtem kosinů. $2/8^{1/2}$ je kosinem 45° . Přímá verifikace je možná pouze pro K_5 s třemi ortogonálními osami.

17.4 Vlastní hodnoty a vlastní vektory

Matice vzdáleností přímých řetězců mají 3 nenulové vlastní hodnoty: $W + a$, $-a$ a $-W$, kde W je topologické Wienerovo číslo $\binom{n+1}{3}$. Vlastní hodnota a má následující hodnoty

| n | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|---|---|--------|--------|--------|--------|--------|---------|
| | 0 | 0.4495 | 1.4031 | 3.0384 | 5.7272 | 9.0405 | 13.7494 |

Vlastní vektor nejmenší vlastní hodnoty W má prvky $v_j = -1 + 2(j-1)/(n-1)$, které váží n následných čtverců čísel k od $-(n-1)$ až po $(n-1)$. To vede ke kombinatorické identitě

$$\sum_{k=0}^{n/2} [1 - 2k/(n-1)][(n-1-k-x)^2 - (k-x)^2] = 1 - 2x/(n-1) \quad (17.7)$$

kde x jde od 0 až k $(n-1)$. Pokud přírůstky řetězce jsou dva vrcholy, potom změna mezi následnými počty dává možnost použít úplnou indukci

| | | | |
|-----------------------|--------|-----------------------|--------|
| $5/5 \times (16-1) =$ | $75/5$ | $7/7 \times (25-4) =$ | 21 |
| $3/5 \times (9-0) =$ | $27/5$ | $5/7 \times (16-1) =$ | $75/7$ |
| $1/5 \times (4-1) =$ | $3/5$ | $3/7 \times (9-0) =$ | $27/7$ |
| | | $1/7 \times (4-1) =$ | $3/7$ |
| $105/5$ | | $21 + 105/7$ | |

která je ověřená přímými výpočty. Pro $x = 0$, identita se zjednodušuje na

$$\sum_{k=0}^{n/2} (n-1-2k)^2 = \binom{n+1}{3}. \quad (17.8)$$

Vlastní hodnota a u přímých řetězců je vytvořena rovinnou reflexí (prvky vlastního vektoru jsou symetrické podle středu řetězce) se získá rotačním tenzor

$$b = (+W/2) = [\Sigma d^4 - 3/4 W^2]^{1/2}. \quad (17.9)$$

Důkaz je jednoduchý. Součet čtverců vlastních hodnot musí být rovný stopě čtverce matice. To znamená, že s dvojitým součtem hodnot d^4

$$(1/2W + a)^2 + W^2 + (-1/2W)^2 = 2\Sigma d^4 \quad (17.10)$$

řešení kvadratické rovnice dá výsledek. Čtyři vlastní hodnoty (včetně nulové) se mohou vyjádřit jako $W/2 \pm (b$ nebo $W/2)$.

Můžeme porovnat tři nenulové vlastní hodnoty přímých lineárních řetězců s třemi odlišnými vlastními hodnotami topologické matice vzdáleností hvězd. Kladné vlastní hodnoty jsou součtem všech záporných vlastních hodnot. Existuje $(n-2)$ vlastních hodnot -2 a speciální vlastní hodnota

$$-a = (n-2)/2 + [n^2 - 3n + 3]^{1/2}. \quad (17.11)$$

Odpovídající vlastní vektory pro hvězdy zakořeněné v v_1 jsou

$$\begin{array}{ccccccc} & 1 & & 1 & & 1 & \dots \\ 0 & & 1 & & -1/(n-2) & & -1/(n-2) \dots \\ 1 & -a/(n-1) & & -a/(n-1) & & -a/(n-1) & \dots \end{array}$$

V důsledku monotonnosti matice vzdáleností se snadno naleznou všechny součiny. Vlastní hodnota a se získá jako řešení kvadratické rovnice

$$a^2 + 2(n-2)a - (n-1) = 0. \quad (17.12)$$

Rovinných konformace C_6 má následující vlastní hodnoty: 12, 0, 0, 0, -6, -6,, ve srovnání s dvěma konformacemi C_6 uloženými na krychli 9, 0, 0, -1, -4, -4 a 8.424, 0, 0, -1.424, -3, -4 (dvě permutace s menšími vzdálenostmi).

Maximální vlastní hodnota sudých rovinných cyklů na kruhu jednotkovým poloměrem je $2n$ a její vlastní vektor je jednotkový vektor (toto odpovídá $2n/4$ pro topologické matice vzdáleností). Sudé vzdálenosti na kružnici tvoří pravoúhlé trojúhelníky nad průměrem jako přeponou a jejich páry se sečítají na 4.

17.5 Zobecněné matice vzdáleností

Jinou maticí při definování grafu je matice sousedství \mathbf{A} , která má identické jednotkové prvky jako matice vzdáleností a nulové prvky na místech, kde d_{ij} jsou větší než 1.

Je možné formulovat množiny zobecněných matic vzdáleností \mathbf{D}^k kde k je mocnina topologické vzdálenosti d_{ij} . Potom matice sousedství \mathbf{A} se objevuje jako zobecněná matice vzdáleností $\mathbf{D}^{-\infty}$, což je nekonečná inverzní mocnina vzdáleností.

Matice $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T - \mathbf{I})$ (jinak matice vzdáleností úplného grafu) je tedy maticí vzdáleností \mathbf{D}^0 . Změny vlastních hodnot a vlastních vektorů mezi maticí sousedství \mathbf{A} a maticí vzdáleností \mathbf{D} jsou potom kontinuální transformací vytvořenou mocninami daných vzdáleností nebo v některých případech změnami geometrické konformace. Budeme studovat některé speciální příklady.

17.5.1 Zvláštní případy: Lineární řetězce

Jako první příklad použijeme lineární řetězce, které existují ve tvaru pevných tyčí. Bylo zjištěno, že pro vyjádření této geometrické vlastnosti je nutné a dostačující psát vzdálenosti d_{ij} jako čtverce lineárních vzdáleností. Topologická matice vzdáleností je potom právě druhou mocninou geometrické matice vzdáleností lineárního řetězce ohnutého na vrcholy n rozměrné jednotkové krychle. Jejich lineární vzdálenosti jsou čtverce odpovídající d_{ij} na diagonálách v n rozměrné krychli. V tabulce 1 jsou zobrazeny vlastní hodnoty rozdílných

Table 17.1: Vlastní hodnoty $d^* \mathbf{D}^k$ matic lineárního řetězce L_5

| Distance mocniny | | | | | |
|------------------|---------|---------|---------|---------|----------|
| j | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $-\infty$ | 1.7321 | 1 | 0 | -1 | -1.7321 |
| -2 | 2.1109 | 0.7376 | -0.3024 | -1.0501 | -1.4960 |
| -1 | 2.6166 | 0.3036 | -0.5607 | -1.0536 | -1.3056 |
| -1/2 | 3.1292 | -0.1686 | -0.7526 | -1.0387 | -1.1649 |
| 0 | 4 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| 1/2 | 5.5279 | -0.7959 | -0.9187 | -1.3178 | -2.4955 |
| 1 | 8.2882 | -0.5578 | -0.7639 | -1.7304 | -5.2361 |
| 2 | 23.0384 | 0 | 0 | -3.0384 | -20 |
| 3 | 77.1665 | 2.2099 | 0.5776 | -5.7441 | -74.2099 |

mocnin matice vzdáleností L_5 v tabulkové formě. Tento řetězec je dosti dlouhý, aby se ukázaly hlavní vlastnosti takové soustavy, kde druhé mocniny geometrické matice vzdáleností mají vždy pouze 3 nenulové vlastní hodnoty.

Všechny diagonální prvky matic vzdáleností jsou nulové a tedy součty vlastních hodnot musí být také nuly. Je už dobře známo, že vlastní hodnoty matic sousedství lineárního řetězce jsou $2\cos(2k\pi/n + 1)$, tvoří vlnu. Vlastní hodnoty matice sousedství tvoří nejnížší limitu k vlastním hodnotám matice vzdáleností se zápornými mocninami k . Největší vlastní hodnota kontinuálně roste s rostoucí mocninou k . Jiné vlastní hodnoty mají při $k = 0$ pól. Všechny záporné vlastní hodnoty jsou -1. Pro nezáporné vlastní hodnoty je \mathbf{A} minimální vyjma nejnížší vlastní hodnoty. Ta má zde své maximum. Třetí singularita vzniká, když mocnina $k = 2$. Vždy existují pouze tři nenulové vlastní hodnoty. Tedy funkční vztah

$$\lambda_j = f(k) \quad (17.13)$$

má tři odlišné oblasti, jejichž parametry lze nalézt lineárními regresemi.

Topologická matice vzdáleností řetězce, kde počty orientovaných hran představují vzdálenosti mezi vrcholy, představuje buď první momenty geometrické matice vzdáleností pevné tyče, nebo současně geometrickou maticí čtverců vzdáleností v lineárním řetězci uloženém na n rozměrné jednotkové krychli. Existence singularity při $k = 2$ je daná symetrií pevných tyčí. Momenty podle délky jejich os jsou 0. Tři nenulové vlastní hodnoty lze ztotožnit s prvky symetrie jak je ukázané v podkapitole ??.

Vlastní vektory vzdáleností jsou dosti zajímavé při jakýchkoliv k . Jsou obvykle symetrické podle středu, vyjma nulových vlastních vektorů při $k = 2$, a degenerovaných -1 vlastních vektorů při $k = 0$, které jsou asymetrické. Symetrie může být zrcadlová ($v_j = v_{n-j}$, značená jako σ), nebo rotační ($v_j = v_{n-j}$, značená jako C). Tyto symetrie se střídají pro kladné a záporné mocniny k :

Table 17.2: Vlastní hodnoty d^* cyklu C_4 a \mathbf{D}^k matic

| | | | | |
|------------------------------|-------|--------|--------|--------|
| Vlastní hodnoty \mathbf{A} | 2 | 0 | 0 | -2 |
| Změny vzdáleností | +d | -d | -d | +d |
| Příklady: d_{ij}^2 0.25 | 1.75 | -0.25 | -0.25 | -1.75 |
| 1 | 3 | -1 | -1 | -1 |
| 1.414 | 3.414 | -1.414 | -1.414 | -0.586 |
| 2 | 4 | -2 | -2 | 0 |
| 4 | 6 | -4 | -4 | 2 |
| 8 | 10 | -8 | -8 | 6 |
| Záporné vzdálenosti -1 | 1 | 1 | 1 | -3 |

| | | | | | |
|----------------|----------|---|----------|---|----------|
| Vlastní vektor | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| k záporné | σ | C | σ | C | σ |

Kladný nenormalizovaný vlastní vektor je deformovaný jednotkový vektor sloupec (řádka). V matici sousedství \mathbf{A} jsou hodnoty odpovídající jednotkovému vektoru sníženy na obou koncích, pro kladné mocniny vzdáleností k jsou sníženy ve středu.

Fakt, že topologická matice vzdáleností stejně jako geometrická matice vzdáleností lineárního řetězce má n různých nenulových vlastních hodnot je konsistentně vysvětlena jejich rozměrností. Mají příliš mnoho prvků symetrie, aby byly uloženy ve 3 rozměrech, kde jsou dostačující tři nenulové vlastní hodnoty.

17.5.2 Zvláštní případy: Cykl C_4

Jiný výjimečný případ je cykl C_4 , který lze ohnout z tvaru pravidelného čtyřštěnu na rovinný čtverec zvětšením dvou vzdáleností nebo na tyč jejich rovnoměrným snížením. Jeho topologická matice vzdáleností je tedy nerozlišitelná od druhé mocniny geometrické matice vzdáleností čtverce a matice $[\mathbf{J}\mathbf{J} - \mathbf{I}]$ je jednou z možných geometrických konformací (podobně jako u řetězce L_4 , avšak matice sousedství jsou zde rozdílné).

Při cyklu C_4 je matice sousedství \mathbf{A} současně maticí vzdáleností tohoto cyklu, když vrcholy 1 a 3 i 2 a 4 jsou ztotožněny a cykl se složí. Pokud vzdálenosti 1 a 3 i 2 a 4 nejsou stejné, je také možné srovnat všechny orientované hrany tohoto cyklu do přímky.

Vlastní hodnoty odpovídající prvkům matice vzdálenosti d_{ij} se získají jednoduše přičtením nebo odečtením vzdálenosti d_{ij} od vlastních hodnot \mathbf{A} .

Toto schéma vede k změně pořadí vlastních hodnot. Druhá vlastní hodnota se získá pro kladné k jako čtvrtá. Vzdálenost 8 je geometricky nemožná, musí to tedy být šestý moment vzdálenosti $\sqrt{2}$. Záporné vzdálenosti lze interpretovat jako čtverce vzdáleností v komplexní rovině. Všechny matice vzdáleností C_4 mají stejnou množinu vlastních vektorů, odpovídající Vierergruppe:

Table 17.3: Vlastní hodnoty $d^* \mathbf{D}^k$ matic romboického cyklu C_4

| Vzdálenosti | | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-------------|------------|--------------------|----|----|--------------------|
| d_{13}^2 | d_{24}^2 | | | | |
| 3 | 1 | $2 + 5^{1/2}$ | -3 | -1 | $2 - 5^{1/2}$ |
| 4 | 0 | $2 + 8^{1/2}$ | -4 | 0 | $2 - 8^{1/2}$ |
| 1 | 0 | $(1 + 17^{1/2})/2$ | -1 | 0 | $(1 - 17^{1/2})/2$ |

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Pokud složíme C_4 jako romboid, dostaneme diagonály rozdílných délek. Jejich čtverce se opět objeví jako vlastní hodnoty, avšak ve složitém vzoru, jako v tomto příkladě

Druhý případ je extrémní, všechny vrcholy leží na přímce. Třetí případ představuje dvě dvojné vazby natočené o 60° , nebo matici sousedství grafu na obr. 13.2 b, nebo matici vzdáleností jedné jeho konformace. Vlastní vektory jsou také deformované, jdou opět k nižším hodnotám a k vyšším hodnotám (v třetím případě je to 0.7808) a mající nulové hodnoty, které jsou možné také pro jiné konformace nebo momenty:

$$\begin{pmatrix} 0.6180(0.4142) & 1 & 0.6180(0.4142) & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -0.6180(0.4142) & 1 & -0.6180(0.4142) \end{pmatrix}$$

Existuje také třetí deformace cyklu C_4 , odpovídající změnám dvou vzdáleností. Čtverec se transformuje v obdélník nebo je cykl tvořen ze dvou řetězců L_2 .

Zde se objevuje nulová vzdálenost jak se mění permutovaná matice sousedství:

| Vzdálenosti d^2 | Vlastní hodnoty | | | |
|-------------------|-----------------|---|----|-----|
| 0 | 2 | 0 | -2 | 0 |
| 1 | 4 | 0 | -2 | -2 |
| 4 | 10 | 0 | -2 | -8 |
| 8 | 18 | 0 | -2 | -16 |

Všechny vlastní vektory zůstávají stejné jako u C_4 . Lze se domnívat, že topologická matice vzdáleností grafu sestávajícího se ze dvou složek L_2 má dvě nekonečné vlastní hodnoty, jiné dvě jsou 0 a -2. To vyplývá z vlastních vektorů, které zůstávají identické bez ohledu na vzdálenosti obou složek. Vlastní hodnoty

Table 17.4: Vlastní hodnoty dvou jednotkových čtverců ve vzdálenosti d^2

| Vlastní hodnota | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| Vzdálenost | | | | |
| $\mathbf{A}(\text{krychle})$ | 2.618 | 1.618 | 0.618 | 0.382 |
| $\mathbf{A}[2C(4)]$ | 2 | 2 | 0 | 0 |
| 0 | 8 | 0 | -4 | -4 |
| 1 | 12 | -4 | -4 | -4 |
| 4 | 24 | -16 | -4 | -4 |
| 8 | 40 | -32 | -4 | -4 |

jsou opět určeny prvky symetrie. Nenulové vlastní hodnoty jsou tři pro čtverec a dvě pro konfigurace odpovídající L_2 .

17.5.3 Zvláštní případy: Dva cykly C_4 (krychle)

Zde budeme studovat vytvoření krychle ze dvou cyklů C_4 . Matice sousedství dvou cyklů C_4 lze zapsat podobně jako pro dva řetězce L_2 v blokové formě jako

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

Matice sousedství krychle je

$$\begin{pmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

Matice vzdáleností dvou čtverců má tvar

$$\begin{pmatrix} \mathbf{D} & (\mathbf{D} + d\mathbf{J}\mathbf{J}^T) \\ (\mathbf{D} + d\mathbf{J}\mathbf{J}^T) & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

Odpovídající vlastní hodnoty jsou v tabulce. Další čtyři vlastní hodnoty jsou buď nulové, nebo mají stejné hodnoty se zápornými znaménky

Vlastní hodnoty dvou na sebe položených čtverců v nulové vzdálenosti jsou právě zdvojené vlastní hodnoty jednoho čtverce. Třetí vzdálenost se přidává čtyřikrát k první vlastní hodnotě a odečítá se čtyřikrát od druhé.

Zdá se, že existuje vzor, jak se tvoří spektrum mřížkového grafu. Spektrum přímého řetězce L_3 je 5.416, 0, -1.416, -4. Spektrum čtvercové mřížky tvořené třemi L_3 je 25.416, -12, -1.416, -12, zatímco 3 ztotožněné L_3 mají spektrum 13.348, -1.348, -12. To je $3 \times (4.449, -0.449, -4)$, vlastní hodnoty L_3 . Vlastní hodnoty odpovídající momentu reflexe se lehce změnily.

Zobecnění matic vzdáleností \mathbf{D}^k na matice sousedství je dvojznačné pro topologické matice vzdáleností grafů, které jsou uloženy rozdílně od své standardní konfigurace. Například na krychli lze uložit mnoho rozdílných grafů. Jejich matice sousedství jsou subgrafy krychle.

17.6 Nelineární a záporné vzdálenosti

Bylo obvyklé používat libovolné vzdálenosti v maticích vzdáleností, jako v problému obchodního cestujícího. Pokud požadujeme, aby vzdálenosti v matici vzdáleností byly čtverci euklidovských vzdáleností, potom je nutné nalézt interpretaci pro matice, kde vzdálenosti jsou delší nebo kratší než možné.

Jednoduchou interpretací delších vzdáleností je, že představují cestu se zatáčkami. Zde se objevuje nový problém, v tenzoru \mathbf{SDS}^T se objevují mimodiagonální prvky, které dávají kosiny úhlů mezi orientovanými hranami větší než 1. Například následující matice:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 1 & 0 & 4 \\ 10 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

dávají odpovídající tenzory

$$\begin{pmatrix} -2 & -4 & -2 \\ -4 & -8 & -4 \\ -2 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -5 & -3 \\ -5 & -10 & -5 \\ -3 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -4 \\ -6 & -12 & -6 \\ -4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -7 & -5 \\ -7 & -20 & -13 \\ -5 & -13 & -8 \end{pmatrix}$$

Pokud je přepona delší než čtverce odvěsen, mimodiagonální prvky odpovídající kosinům jsou projekce její odmocniny na odvěsny. To se jeví, jako kdyby byly prodlouženy, aby odpovídaly své přeponě. Pokud odvěsny nejsou stejné, dekompozice jsou nestejně. Například

$$1.1180 + 1.1180 = 5^{1/2},$$

$$1.1068 + 2 \times 1.0277 = 3.1622 = 10^{1/2}.$$

Pouze část odpovídající jednotkové délce se objevuje ve výsledku. Pravidlo pro dekompozice je opět teorém kosinů (17.2). To platí i pro záporné vzdálenosti, které lze případně interpretovat jako čtverce vzdáleností v komplexní rovině. Pokud je celá matice vzdáleností záporná, znaménko mění pouze znaménko výsledku. Avšak kombinace kladných a záporných znamének vede ke kosinům větším než 1, například

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

úhly odpovídající kosinům větším než 1 nemají v euklidovském prostoru smysl.

Chapter 18

Diferenciální rovnice

18.1 Úvod

Staří Řekové byli velmi dobrými geometry a měli jisté znalosti algebry, avšak nebyli schopni si představit dráhu pohybujícího se objektu jako geometrický problém. Každý zná Zenonovy paradoxy.

Byl to kulturní šok, když Zenon vystoupil se svými objevy. Představte si, Achilles může nikdy chytit želvu, pokud má handicap. Když ji Achilles dohání, želva mění svou polohu a zůstává vpředu. Když Achilles běží druhý handicap, želva opět mění svou polohu a tak dále v nekonečně mnoha intervalech. Staří matematikové nezjistili, že součet nekonečného počtu stále se snižujících zlomků je konečný. Avšak je dost podivné, že nebyli schopni představit si situaci graficky jako obr. 18.1.

Tento jednoduchý náčrt dvou přímk představuje oba soutěžící, kteří se pohybují konstantní rychlostí. Jedna osa ukazuje jejich geometrické polohy směřující dolů na závoděšti. Horizontální osa odpovídá času. Představit si abstraktní čas jako geometrickou vzdálenost bylo inovace, která se zdá být nyní zřejmá. Obě hrany lze reprezentovat rovnicemi a bod, kde se obě hrany kříží lze vypočítat. Schodiště mezi oběma hranami ukazuje, že intervaly se snižují a konvergují. Součet nekonečně mnoho členů je konečný.

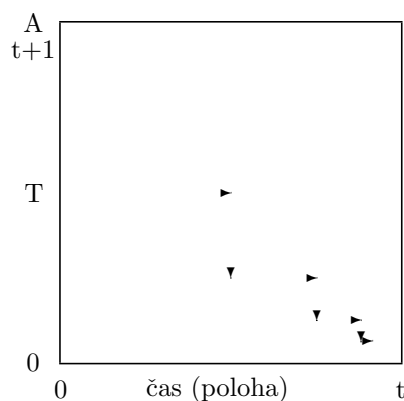
18.2 Analytická geometrie

Byl to Descartes, kdo se svou analytickou geometrií našel, že jednoduché náčrt dvou přímk řeší Zenonovu aporeu o Achillovi a želvě.

Analytická geometrie studuje nejen izolované body nebo vektorové řady, jak jsme to doposud prováděli, avšak množiny bodů spojené funkčními vztahy. Už jsme konstruovali číselné stupnice. Jejich hrany lze se otáčet, posunovat a ohýbat.

Začneme maticovým násobením vektoru řádky skalárem

Figure 18.1: Zenonův náčrt aporey Achilla s želvou. Přímky jsou vztahy mezi geometrickými polohami obou soutěžících (svislice) a čas (horizontála)



| x | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|----|-----|---|-----|---|-----|---|-----|
| y | 1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| y' | 0.5 | 0 | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 |

Přímka 6 bodů v ose x se kopírovala a promítla do osy y . Výsledné polohy původních bodů v ose b se popisují buď jako $y = 1x$ nebo jako $y = 0.5x$.

Avšak tyto rovnice platí nejen pro množinu šesti bodů s přirozenými koordinátami ale pro všechny body mezi nimi ležícími na přímce. Jednotkové vektory nejsou nutné. Rovnice přímky ve dvou rozměrech je

$$y = a + bx \quad (18.1)$$

člen a je hodnota y , když $x = 0$. V daném příkladě $a = 0$. Člen a je sklon přímky určený jako poměr y/x , je to tangens úhlu α . Pokud známe y , můžeme nalézt x vyřešením rovnice (18.2) jako $x = (y - a)/b$.

Dvojměrné rovinné Simplexy jsou přímky mající tvar $y + x = m$, jejich sklony jsou záporné $b = -1$ a jsou definovány pouze v kladném kónusu.

V rovině lze definovat mnoho přímek. Ty mohou být paralelní nebo se mohou křížit. Ke křížení dojde, když obě koordináty x a y obou přímek jsou stejné, jako například

$$y = 2 + 3x$$

$$y = 3 + 2x.$$

řešení je $2 + 3x = 3 + 2x$ a tedy $x = 1$. Vložením x zpět dostaneme $y = 5$. S použitím maticové techniky se soustava dvou rovnic může uspořádat do polárního tvaru:

$$-3x + y = 2$$

$$-2x + y = 3$$

Pak se najde inverzní matice pro matic

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ což je } \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

a ta dává, když se násobí vektorem $bfb = (2, 3)^T$ řešení $(1, 5)^T$.

18.3 Zenonovy grafy

Vraťme se k Zenonově aporei. Nyní sledujeme odděleně polohy Achilla nebo želvy. Pro tento účel nepotřebujeme časovou osu. Osa x je vzdálenost ke konci tratě, y je proběhnutá vzdálenost. Například:

| Interval | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 |
| y | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |

Vztah obou hodnot se popisuje rovnicí $y = 8 - x$. Konstanta je relativní délka tratě vyjádřená rychlostí. Je konečná.

Jiný popis pohybu se získá, když základna x představuje polohu v čase t a vertikální osa y polohu v čase $t + 1$, 1 představuje interval času Δt . Budiž koordináty měřených bodů pro jednoduchost:

| Interval | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

Rovnoměrný pohyb se popisuje rovnicí $y = 1 + x$.

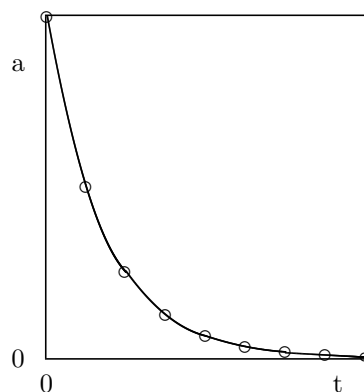
Nyní změňme koordináty následovně:

| Interval | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 258 | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 |
| y | 0 | 128 | 192 | 224 | 240 | 248 | 252 | 254 | 255 |

Rychlost pohybu není konstantní, avšak snižuje se exponenciálně. Čára zobrazující hodnoty x v rozdílných časových intervalech na obrázku 18.2 je prohnutá. Abychom ji napřímili, musíme použít logaritmickou stupnici $y = \log x$.

Opět necháme základnu x představovat polohu v čase t a vertikální osu y polohu v čase $t + 1$, 1 představuje interval času Δt . Koordináty exponenciální křivky jsou

Figure 18.2: Exponenciální křivka. Zmenšující se vzdálenostní intervaly z Aporey Achilla s želvou jsou na vertikální ose, horizontální osou je čas



| Interval | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| x | 0 | 128 | 192 | 224 | 240 | 248 | 252 | 254 | 255 |
| y | 128 | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | ? |

x hodnoty rostou, y hodnoty se snižují. Obě změny nejsou lineární. Nicméně pokud hodnoty x jsou nakreslí proti odpovídajícím hodnotám y, náčrt je lineární, viz obr. 18.3.

Náčrt představuje exponenciální změny, například radioaktivní rozpad nebo monomolekulární chemické reakce, pokud y je výchozí substance a x je produkt. Odpovídající rovnicí je

$$y = 2^{8-t}. \quad (18.2)$$

ve své moderní formě je nyní transformovaná na otázku, kdy se rozpadne poslední radioaktivní atom, když výchozí počet je $x = 256$.

Jsme nyní v podobné situaci jako byli Řekové. Rozpad radioaktivních prvků se řídí exponenciálním zákonem. Poměr rozpadajících se atomů ve stejných časových intervalech Δ_t je konstantní. Abychom si byli jisti, že všechny atomy se rozpadly, potřebujeme nekonečně mnoho takových intervalů. Podstatné nekonečně mnoho intervalů je potřeba pouze pro poslední atom, pokud požadujeme jistotu jeho rozpadu.

Grafový proces je stejný jako v případě běžců, pokud obě osy, času i polohy, se nahradí polohami (koncentracemi) v následných časových intervalech t a $(t+1)$, jako kdyby obě polohy byly na dvou rozdílných ortogonálních osách. Když se to udělá, tyto polohy se považují za ortogonální a exponenciální pohyb se mění do lineární, jako kdybychom použili logaritmickou stupnici¹.

¹Lineární pohyb je limitou exponenciálního pohybu, když konstanta je $k = 0$

Figure 18.3: Linearizace exponenciální křivky. Snižující se vzdálenosti mezi body odpovídají konstantním časovým intervalům

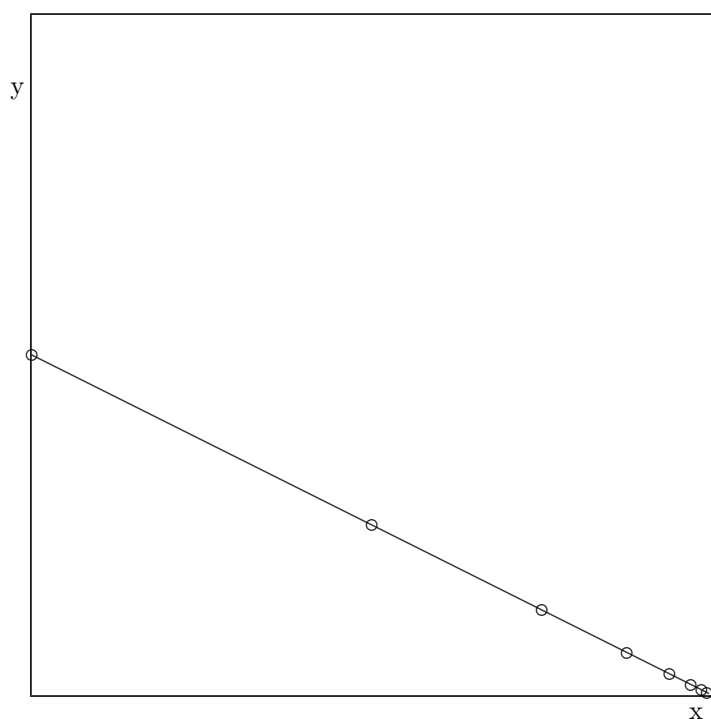
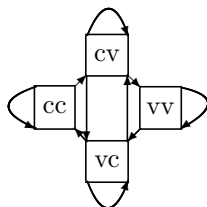


Figure 18.4: Možné přechody dvou písmenné řady. Přímé přechody $cc \leftrightarrow vv$ jsou nemožné



18.4 Markovovy matice

Markov bylo ruský matematik, který dostal poněkud dětský nápad studovat uspořádání, ve kterém souhlásky následují samohlásky v Puškinově básni. Po souhlásce může následovat jiná souhláska nebo samohláska s nějakou statistickou pravděpodobností, která je určena strukturou jazyka a jeho použitím autorem.

Markov studoval pravděpodobnosti přechodů následných hlásek, jako souhlásky c a samohlásky v v příkladě

A vv A vc M cv A vc R cc K cv O vc V

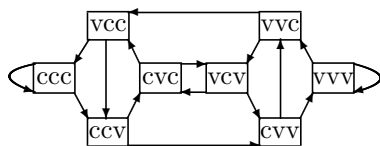
Pravděpodobnosti vv , vc , cc a cv se získají z přímých součtů jejich dělením všemi možnostmi přechodů (zde 7 přechodů 8 písmen). Když se vzájemně uspořádají do matice, tvoří *stochastické matice* \mathbf{M} , jejichž řádkové součty jsou 1. Teorie procesů spojených s těmito maticemi tvoří část teorie *stochastických procesů*.

Každá hláska v textu se považuje za stav soustavy, která osciluje neustále mezi svými možnými stavy a tvoří tak řetězec následných jevů. Existuje jiná možnost, jak interpretovat jev. Text lze považovat jako celek a všechny pozorované přechody mohou tvořit jeden přechod do příštího stavu. Nebo lze srovnávat dva odlišné objekty představované řadami symbolů. Rozdíly lze tedy vyjádřit jako orientovaný hranový graf, například

| | ? | A | A | M | A | R | K | O | V |
|---|---|---|----|----|----|---|----|----|---|
| | A | A | M | A | R | K | O | V | ? |
| c | * | 0 | 1 | -1 | 1 | 0 | -1 | 1 | * |
| v | * | 0 | -1 | 1 | -1 | 0 | 1 | -1 | * |

Dvě řádky s čísly tvoří transponovanou incidenční matici \mathbf{S}^T multigrafu se smyčkami, nuly jsou na místech smyček, orientovaných hran začínajících a končících na stejném místě, hvězdičkou $*$ jsou označeny neurčité počáteční a

Figure 18.5: Možné přechody tří písmenné řady



koncové stavy. Je možné spojit poslední písmeno s prvním, aby se odstranily tyto volné konce.

řada je tvořena rozdíly ($\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j$) a je jasné, že ji můžeme napsat jako incidenční matici orientovaného multigrafu se smyčkami. Na obr. 18.4 jsou ukázané možné přechody dvou písmenné řady, na obr. 18.5 možné přechody tří písmenné řady jsou ukázané.

Takové přechody nejsou omezeny na jazyk. Pokud sledujeme atomy radioaktivních prvků po nějaké časové období, potom každý atom buď zůstal nezměněný, nebo vyžářil kvantum radiace a změnil se na atom jiného prvku. Zde neznáme indexování jednotlivých atomů, můžeme určit pouze jejich množství. Množství δx atomů, které se rozpadly v časovém intervalu, je úměrné počtu atomů x , konstantou proporcionality k délce časového intervalu δt je k . Rovnice popisující tento proces je

$$\delta x / \delta t = -kx \quad (18.3)$$

Řešení této rovnice se nalezne oddělením proměnných v diferenciálním tvaru (velmi krátké δt):

$$\delta x / x = \delta(\log x) = -k \delta t \quad (18.4)$$

a integrací obou stran a delogarithmováním výsledku

$$x = A \exp(-kt) \quad (18.5)$$

kde A je počáteční hodnota x jako integrační konstanta. Toto řešení má shora zmíněný háček: Nemůžeme si nikdy být jisti s časem, kdy se rozpadne poslední atom v soustavě, existují pouze pravděpodobnosti. To je rozdíl mezi diferenciálním a integrálním kalkulem a konečnou matematikou.

Proces lze zobrazit dvěma rozdílnými náčrtky, buď vynášíme koncentrace vzhledem k uplynulému času jako na obr. 18.2, což je tradiční technika, nebo vynášíme koncentrace měnící se substance x_t případně koncentrace produktu $(1 - x)_t$ vzhledem k těmto koncentracím x_{t+1} nebo $(1 - x_{t+1})$ v konstantních časových intervalech Δt jako na obr. 18.3. Body koncentrace na tomto grafu tvoří přímky, jejichž sklony jsou závislé na rychlostních konstantách k .

Ještě jednou: Hodnoty funkce ve dvou rozdílných časových intervalech byly pojednány jako ortogonální vektory. Tímto způsobem jsme získali graf lineární

funkce z exponenciální funkce, jako kdybychom našli logaritmus exponenciální funkce. Ortogonální projekce dala logaritmickou transformací exponenciální rychlosti transformací n atomů dvou druhů.

18.5 Mnohorozměrné systémy

Podle naší definice matice orientovaných grafů popisují pohyby na rovinách ortogonálních k jednotkovým vektorům \mathbf{I} . Jsme schopni sledovat pohodlně měnící se koncentrace 3 složek, které se mohou nakreslit na rovnostranný trojúhelník.

Co je snadný pro dvě složky se stává složitým v systémech obsahujících n rozdílných složek, z nichž každá se může transformovat v jinou s rozdílnými rychlostmi k_{ij} . Nicméně základní zůstává a takové systémy se popisují zobecněnou Markovovou maticí \mathbf{M} , jejíž mimodiagonální prvky k_{ij} jsou rychlostní konstanty soustavy rovnic ?? a diagonální prvky jsou součty rychlostních konstant se zápornými znaménky $-\sum k_{ij}$. Diagonální prvky jsou buď sloupcové součty, pokud matice \mathbf{M} působí na koncentrační vektor sloupec \mathbf{c} zleva, nebo řádkové součty, pokud matice \mathbf{P} působí na koncentrační vektor řádku \mathbf{c}^T zprava.

18.6 Matice přechodů

Matice přechodů \mathbf{P} je tvořena dvěma částmi, Markovovou maticí \mathbf{M} a maticí identity \mathbf{I}

$$\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \mathbf{M}) . \quad (18.6)$$

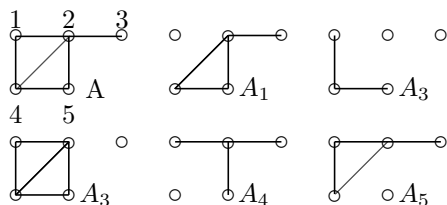
\mathbf{M} je asymetricky rozdělená Laplace-Kirchhoffova matice $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ se zápornými znaménky na diagonále, která je normalizována na jednotkové koncentrace. Matice přechodů \mathbf{P} mají dvě limity: Buď matici identity \mathbf{I} , pokud nedochází k žádné změně v daném časovém intervalu, nebo permutační matice \mathbf{P} , pokud se všechny látky transformují na jiné během jednoho časového intervalu. Můžeme předpokládat, že každé reakce (přechod), ve které se jedna látka mění v jinou látku, řekněme $a \rightarrow b$ v časovém intervalu δt se registruje v incidenční matici \mathbf{S} jako difference dvou jednotkových vektorů $(\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)$. Tyto aditivní operátory se transformují v kvadratické formě $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ do multiplikativních operátorů, které jsou normalizovány, to znamená, že operátor k_{ij} je poměr transformovaných objektů ke všem přítomným objektům, a normalizovaná symetrická kvadratická forma $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ se štěpí do řádkového operátoru \mathbf{P}_r a sloupcového operátoru \mathbf{P}_c

$$-\mathbf{S}^T \mathbf{S} = \mathbf{P}_r + \mathbf{P}_c . \quad (18.7)$$

Matice sousedství \mathbf{A} , které jsme používali doposud, byly symetrické. Ty se získaly jako mimodiagonální prvky kvadratických forem incidenčních matic buď orientovaného grafu \mathbf{S} , nebo neorientovaného grafu \mathbf{G} (viz podkapitolu 12.7).

Poněvadž asymetrické matice sousedství se používají jako operátory, je nutné určit, jak se formálně vytvoří. Když se vektory-hrany \mathbf{c} násobí zprava, potom

Figure 18.6: Reakční multigraf



$a_{ij} = k$, když k orientovaných hran jde z vrcholu j do vrcholu i , když se vektory-sloupce \mathbf{c} násobí zleva, potom $i_j = k$, když k orientovaných hran jde z vrcholu i do vrcholu j . Použijeme dolní indexy r a l pro oba druhy matic sousedství \mathbf{A} .

Orientaci orientovaných hran lze vyjádřit znaménky, kde $a_{ij} = +k$, když k orientovaných hran jde z vrcholu i do vrcholu j , nebo kde $a_{ij} = -k$, když k orientovaných hran jde z vrcholu i do vrcholu j , nebo opačné.

Pokud každá orientovaná hrana představuje jednu transformaci objektu j na objekt i a počty k_{ij} jsou normalizovány, k_{ij} se mění v rychlostní konstanty reakcí známých v chemii jako monomolekulární reakce, spolu s odpovídajícími součty $\sum k_{ij}$ na diagonále se zápornými znaménky. Když se koncentrace (nebo koordináta) vektorů \mathbf{c} násobí těmito operátory, získají se změny koncentrací, když se koncentrace vektorů \mathbf{c} násobí $(\mathbf{I} - \mathbf{P})$, získají se nové koncentrace vektorů. Předpokládáme, že koncentrace vektorů jsou hrany a násobení je zprava

$$\mathbf{c}_{t+1}^T = \mathbf{c}_t^T \mathbf{M}, \quad (18.8)$$

tedy součty $\sum k_{ij}$ na diagonále jsou sloupcové součty.

Budiž \mathbf{S} a \mathbf{G} incidenční matice stejně orientovaného multigrafu, kde \mathbf{S} a \mathbf{G} jsou identické matice vyjma znamének. Neorientovaná hrana odpovídá každé orientované hraně. Hrany \mathbf{S} a \mathbf{G} jsou vzájemně ortogonální vektory.

Odpovídající skalární součiny $\mathbf{S}^T \mathbf{G}$ a $\mathbf{G}^T \mathbf{S}$ jsou asymetrické matice ukazující rozdíly v orientaci orientovaných hran. Jako příklad použijeme multigraf definovaný transponovanou incidenční maticí \mathbf{S}^T (viz obr. 18.6)

$$\mathbf{S}^T \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prvky matice $\mathbf{G}^T \mathbf{S}$ jsou

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Mohou se interpretovat jako

v_{ii} = (orientované hrany do - orientované hrany ven)
 a_{ij} = (orientované hrany z i do j - orientované hrany z j do i),
 potom $a_{ij} = 0$ žádná orientovaná hrana.
 Prvky matice $\mathbf{S}^T \mathbf{G}$ jsou

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lze je interpretovat jako

v_{ii} = (orientované hrany do - orientované hrany ven)
 a_{ij} = (orientované hrany z i do j - orientované hrany z j do i),
 potom $a_{ij} = 0$ žádná orientovaná hrana.

Mimodiagonální prvky matice $\mathbf{S}^T \mathbf{G}$ se liší od mimodiagonálních prvků matice $\mathbf{G}^T \mathbf{S}$ pouze znaménky. Skalární součiny $\mathbf{S}^T \mathbf{G}$ a $\mathbf{G}^T \mathbf{S}$ se mohou kombinovat s kvadratickými formami incidenčních matic. Existují čtyři aditivní kombinace

| | |
|--|---|
| $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ | $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ |
| $\begin{pmatrix} 5 & -3 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ |
| $\mathbf{G}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ | $\mathbf{G}^T \mathbf{S} - \mathbf{S}^T \mathbf{S}$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -8 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ |
| $\mathbf{G}^T \mathbf{S} + \mathbf{G}^T \mathbf{G}$ | $\mathbf{G}^T \mathbf{S} - \mathbf{G}^T \mathbf{G}$ |
| $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} -8 & -2 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ |

To dává tento vzor

$$\begin{aligned}
 \mathbf{G}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{S} &= 2(\mathbf{V}_v - \mathbf{A}_r) \\
 \mathbf{G}^T \mathbf{S} - \mathbf{S}^T \mathbf{S} &= 2(\mathbf{A}_l - \mathbf{V}_{out}) \\
 \mathbf{G}^T \mathbf{S} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} &= 2(\mathbf{V}_v + \mathbf{A}_l) \\
 \mathbf{G}^T \mathbf{S} - \mathbf{G}^T \mathbf{G} &= -2(\mathbf{A}_r + \mathbf{V}_{out}) .
 \end{aligned}$$

Skalární součin $(\mathbf{G} - \mathbf{S})^T \mathbf{S}$ lze normalizovat do levostranného operátoru \mathbf{M} . Diagonální matice stupňů vrcholů (orientované hrany do a ven), stejně jako asymetrické matice sousedství se mohou rozdělit transponováním součtů nebo rozdílů $\mathbf{G}^T \mathbf{S}$ s $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ a jejich kombinováním se součty nebo rozdíly $\mathbf{G}^T \mathbf{S}$ s $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$:

$$4\mathbf{V}_v = (\mathbf{G}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{S}) + (\mathbf{G}^T \mathbf{S} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^T$$

$$-4\mathbf{V}_{out} = (\mathbf{G}^T \mathbf{S} - \mathbf{S}^T \mathbf{S}) + (\mathbf{G}^T \mathbf{S} - \mathbf{G}^T \mathbf{G})^T$$

$$-4\mathbf{A}_l = (\mathbf{G}^T \mathbf{S} + \mathbf{S}^T \mathbf{S}) - (\mathbf{G}^T \mathbf{S} + \mathbf{G}^T \mathbf{G})^T$$

$$4\mathbf{A}_r = (\mathbf{G}^T \mathbf{S} - \mathbf{S}^T \mathbf{S}) - (\mathbf{G}^T \mathbf{S} - \mathbf{G}^T \mathbf{G})^T .$$

Stejná operace s $\mathbf{S}^T \mathbf{G}$ dává vzor

$$\mathbf{S}^T \mathbf{G} + \mathbf{S}^T \mathbf{S} = 2(\mathbf{V}_v - \mathbf{A}_l)$$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{G} - \mathbf{S}^T \mathbf{S} = 2(\mathbf{A}_r - \mathbf{V}_{out})$$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{G} + \mathbf{G}^T \mathbf{G} = 2(\mathbf{V}_v + \mathbf{A}_r)$$

$$\mathbf{S}^T \mathbf{G} - \mathbf{G}^T \mathbf{G} = -2(\mathbf{A}_l + \mathbf{V}_{out}) .$$

Skalární součin $\mathbf{S}^T (\mathbf{G} - \mathbf{S})$ lze normalizovat do pravostranného operátoru \mathbf{M} . Diagonální matice stupňů vrcholů (orientované hrany do a ven), stejně jako asymetrické matice sousedství se mohou rozdělit transponováním součtů nebo rozdílů $\mathbf{S}^T \mathbf{G}$ s $\mathbf{G}^T \mathbf{G}$ a jejich kombinováním se součty nebo rozdíly $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ s $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ jako shora. Tyto transponované matice jsou identické se součty nebo rozdíly $\mathbf{G}^T \mathbf{S}$, protože transponování mění pořadí matice v součinu.

Incidenční matice \mathbf{S} a \mathbf{G} , nebo jejich transponované matice, používané jako multiplikativní operátory, přenášejí každý prvek násobeného maticového vektoru dvakrát, jednou na diagonále, jednou jako mimodiagonální prvek. Součty nebo rozdíly těchto matic \mathbf{S} a \mathbf{G} , které by měly být transformované do kvadratických matic, mají v každé řádce přesně jeden prvek 2 v končícím nebo výchozím sloupci. Výsledky jsou tedy elementární. Avšak tato fakta nejsou vysvětlena v učebnicích ani v běžné literatuře. Pokud byly studovány dříve, byly zapomenuty.

Dvojitě účetnictví orientovaných hran s použitím ortogonálních vektorových řad, jejich součtů a rozdílů, kvadratických forem, skalárních součinů a transponovaných matic, dává síť příbuzných matic popisujících grafy a objekty isomorfní k jejich transformacím.

Laplace-Kirchhoffova matice, identická s $\mathbf{S}^T \mathbf{S}$ a použitá pro řešení elektrických obvodů, je symetrická. Ta ve skutečnosti popisuje pouze vlastnosti obvodu, odpory hran (vodičů) spojujících vrcholy sítě. Směr proudu je zaveden

aplikovaným napětím. Matice proudů odpovídá jedné z matic $\mathbf{S}^T \mathbf{G}$ nebo $\mathbf{G}^T \mathbf{S}$, proudy k ve větvích mají vždy opačná znaménka

$$(\mathbf{S}^T \mathbf{G})_{ij} = -(\mathbf{G}^T \mathbf{S})_{ij}. \quad (18.9)$$

Mimo to proudy do a ven u všech vrcholů musí být vyváženy, $\sum k_{ij} = 0$. Poněvadž odpory se mohou vyjádřit jako délky vodičů, inverzní problém se objevuje jako odporové vzdálenosti.

18.7 Rovnovážné koncentrace

Nalezení diagonální matice \mathbf{C} rovnovážných koncentrací c_j^* pro velké systémy není jednoduchá úloha. Vyžaduje výpočty determinantů všech submatic součinu matic $\delta_j \mathbf{M} \mathbf{C}$, získaných vynecháním j -té řádky a sloupce. Pro tento účel bylo vypracováno mnoho variant Kirchhoffovy techniky napínacích stromů.

Dnes jsou technické potíže odstraněné použitím počítačů, avšak základní otázka zůstává otevřená: je součin $\mathbf{M} \mathbf{C}$ symetrická matice nebo není? Wei a Prater [14], kteří vypracovali maticovou techniku pro řešení soustav exponenciálních rovnic, argumentovali principem mikroskopické reversibility, podle které by měla být správná ekvivalence:

$$c_i^* k_{ij} = c_j^* k_{ji} \quad (18.10)$$

Vlastnosti podstatně kladných matic činí platnost tohoto principu pochybnou. Použijeme vlastnosti vlastních hodnot Markovových matic a budeme studovat operátor $\mathbf{P} = (\mathbf{I} + \mathbf{M})$. Tento operátor transformuje koncentrační vektor \mathbf{c}_t v čase t na koncentrační vektor \mathbf{c}_{t+1} v čase $(t + \delta)$.

18.8 Vlastnosti matic součtů $(\mathbf{I} + \mathbf{M})$

Matice $(\mathbf{I} + \mathbf{M})$ mají jednu vlastní hodnotu přesně 1, jiné vlastní hodnoty jsou v kružnici $0 < \lambda_j < 1$. Matice \mathbf{M} má přesně jednu vlastní hodnotu rovnou nule a zbývajících $(n-1)$ vlastních hodnot v intervalu omezeném kružnicí danou součty rychlostí $\Sigma - k_{ij}$. Poněvadž transformace jakékoliv látky nemůže být větší než její koncentrace, součet rychlostních konstant musí být menší než 1. Pokud se přidá jednotková matice \mathbf{I} k \mathbf{M} , všechny vlastní hodnoty se zvětší rovnoměrně o 1. To má důležitý důsledek, který zůstal nepovšimnutý: Rovnovážný stav operátoru $\mathbf{P} = \mathbf{I} + \mathbf{M}^\infty$ má jednu vlastní hodnotu přesně 1, všechny jiné vlastní hodnoty jsou 0. Součin jakéhokoliv koncentračního vektoru \mathbf{c} s rovnovážným operátorem $(\mathbf{I} + \mathbf{M})^\infty$ musí dát rovnovážný koncentrační vektor \mathbf{c}^* . Tedy $(1/n)\mathbf{I}(\mathbf{I} + \mathbf{M})^\infty$ má tvar n identických sloupců rovnovážných koncentračních vektorů \mathbf{c}^T . Poněvadž součet koncentrací je vždy $\sum_{j=1}^n c_j = 1$, tento výsledek souhlasí s podmínkou $\mathbf{c}(\mathbf{I} + \mathbf{M})^\infty = \mathbf{c}^* \mathbf{1}^T$.

Jinou důležitou vlastností rovnovážného operátoru je, že jeho součin s Markovovou maticí \mathbf{M} musí dávat nulovou matici $\mathbf{0}$: $\mathbf{M}(\mathbf{I} + \mathbf{M})^\infty = \mathbf{0}$. Abychom ukázali

některé důsledky, rozdělíme rovnovážný maticový operátor do diagonální matice \mathbf{C} , jejíž prvky jsou rovnovážné koncentrace c_j^* , a matici mimodiagonálních prvků $[\mathbf{M}(\mathbf{I} + \mathbf{M})^\infty - \mathbf{C}]$. Součiny s Markovovou maticí mají následující tvar:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -c_1^* \Sigma k_{i1} & c_2^* k_{12} & \dots & c_n^* k_{1n} \\ c_1^* k_{21} & -c_2^* \Sigma k_{i2} & \dots & c_n^* k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1^* k_{n1} & c_2^* k_{n2} & \dots & -c_n^* \Sigma k_{iv} \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{M}[(\mathbf{I} + \mathbf{M})^\infty - \mathbf{C}]$$

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{i=1} c_i k_{1i} & \Sigma_{i \neq 2} (c_i^* k_{i1} - c_1^* k_{i1}) & \dots & \Sigma_{i \neq n} (c_i^* k_{1n} - c_1^* k_{i1}) \\ \Sigma_{i \neq 1} (c_i^* k_{2i} - c_2^* k_{2i}) & \Sigma_{i=2} c_i k_{2i} & \dots & \Sigma_{i \neq n} (c_i^* k_{2n} - c_1^* k_{i2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{i \neq 1} (c_i^* k_{ni} - c_n^* k_{ni}) & \Sigma_{i \neq 2} (c_i^* k_{ni} - c_n^* k_{ni}) & \dots & \Sigma_{i=n} c_i k_{ni} \end{pmatrix}.$$

Rovnovážná podmínka je splněna pokud

$$\sum_{j=n}^n c_j^* k_{ji} - \sum_{i=n}^n c_i^* k_{ij} = 0 \quad (18.11)$$

Všechny proudy do každé polohy v matici musí být vyváženy všemi proudy z polohy, aby se udržela rovnováha. Pro to není nutnou podmínkou princip mikroskopické reversibility, je to pouze speciální případ ze všech možností, jak se může dosáhnout rovnováha.

Poněvadž jakýkoliv rovnovážný stav operátoru \mathbf{P} má přesně jednu vlastní hodnotu 1, zbylých $(n-1)$ vlastních hodnot jsou 0, snadno se naleznou odpovídající vlastní vektory. Jednotkovým vlastním vektorem je jednotková řádka \mathbf{J}^T nebo jednotkový sloupec \mathbf{J} . Nulové vlastní vektory lze vybrat jako jakoukoliv z $(n-1)$ hran nebo sloupců Markovovy matice. Každá Markovova matice je tedy soustavou vlastních vektorů svého rovnovážného stavu.

18.9 Klasifikace Markovových matic

Markovova matice popisuje svůj vlastní rovnovážný stav a všechny cesty k rovnováze z jakéhokoliv bodu n rozměrného koncentračního simplexu. Tento simplex je rovina ortogonální k jednotkovému vektoru \mathbf{I} , například pro 3 látky je to rovnostranný trojúhelník. Každý bod simplexu může být rovnovážným bodem soustavy a ke každému rovnovážnému bodu vede nekonečně mnoho cest. Tedy je nutné klasifikovat Markovovy matice podle charakteru cest, které matice vytváří. Pokud vyloučíme matice jdoucí ke koncentracím mimo simplex, existují tři možnosti. Snadno je lze nalézt pro dvojrozměrný případ:

| A | B | C |
|--|--|--|
| $p, q < 0.5$ | $p = q = 0.5$ | $p, q > 0.5$ |
| $\begin{pmatrix} (1-p) & p \\ q & (1-q) \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} (1-p) & p \\ q & (1-q) \end{pmatrix}$ |

- **A:** Hladké přiblížení. Transformační linie jsou uvnitř rámce tvořeného diagonálou a osou x . Determinant \mathbf{P} je větší než 1. První krok může bezprostředně vést k rovnovážné koncentraci.
- **B.** Oscilující přiblížení. To lze rozeznat jednoduše podle reakční konstanty. Pokud $k_{ij} > c_j^*$, potom soustava osciluje, když reakce začíná z vrcholu reakčního simplexu $c^i = 1$. V prvním kroku koncentrace c_j skočí nad rovnovážnou koncentraci. Zde by se měly studovat časové podmínky, to je vztahy mezi časovými intervaly potřebnými pro transformaci objektu v jiný. Tyto intervaly jsou jistě rozdílné pro n rozdílných objektů a celé reakční intervaly. Nemůžeme předpokládat, že všechny objekty reagují současně a tedy reakční intervaly mohou být mnohem delší než transformační intervaly jednotlivých objektů. Avšak tato difference působí labilitu a může vést k oscilacím jiných typů.
- **C.** Nejstrmější přístup. Reakční cesta by měla být přímka jdoucí od jakékoliv koncentračního bodu k rovnovážnému. To vyžaduje, aby reakční konstanta každé látky byla úměrná rovnovážné koncentraci cílové látky. Například pro 3 látky: $c_1 k_{12} = ac_2^*$ $c_1 k_{13} = ac_3^*$. Z podmínek mikroskopické reversibility $c_2^* k_{23} = c_3^* k_{32}$ dostaneme vztah reakčních konstant $k_{23}/k_{13} = k_{23}/k_{12}$. Pro druhé dvě látky dostaneme podobně pro c_2 : $k_{21}/k_{31} = k_{23}/k_{12}$ a pro c_3 : $k_{31}/k_{21} = k_{32}/k_{12}$.

Při srovnání všech tří výsledků vidíme, že takový přístup je možný pouze pro $c_j^* = 1/3$, to je pro střed simplexu.

Princip mikroskopické reversibility zajišťuje nejstrmější přístup pouze na přímce spojující rovnovážný stav s vrcholy simplexu, jedna čistá látka reaguje nebo jedna látka mizí z rovnovážného stavu. To je speciální cesta a je to problematické. Je mnohem snazší připustit existenci cyklických proudů, které musí být vyváženy v rovnováze podmínkou pro látky v cyklu

$$k_{ij} = (k + k')/c_i^*, \text{ kde } k' = c_j^* k_{ij}. \quad (18.12)$$

Nejstrmější přístup k rovnováze by mohl být optimální cestou v koncentračním simplexu, avšak není možné dokázat, že je to pouze jediná možná cesta pro všechny reakční systémy a podmínky. Není možné dokázat, že součin matic \mathbf{MC} je symetrická matice. Na druhé straně je dosti snadné nalézt podmínky pro oscilující reakční soustavy. Dostačující podmínkou je, aby k_{ij} byly relativně velká čísla. Ovšem takové hodnoty porušují podmínky diferenciálních reakcí, předpokládá se, že přírůstky $\delta x/\delta t$ jsou nekonečně malé avšak maticové násobení

ukazuje, proč se objevují oscilace: v jednom časovém intervalu nejsou dostatečně velké koncentrace zpětných produktů k vyvážení ztráty $c_j \Sigma k_{ij}$, pokud obě hodnoty c_j a Σk_{ij} jsou velké. Poněvadž $(\mathbf{I} + \mathbf{M})^b \neq (\mathbf{I} + b\mathbf{M})$, nemůžeme vybrat časové intervaly Δt volně. Ty by měly být srovnatelné s intervaly potřebnými pro reakce. Pokud nějaké reakce vyžadují podstatně delší časy, oscilace se objeví jako v Lotka-Wolterově cyklu.

18.10 Jakobiho aproximace

Ukázali jsme přesné metody pro řešení rovnic $\mathbf{M}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ v kapitole 16, založené na invertování matice \mathbf{M} nebo nalezení jejích vlastních hodnot. V případě, že nejsme schopni provést takové sofistikované matematické operace, můžeme se pokusit uhádnout správnou odpověď. Počítali jsme matice a víme, že pokud se omezíme na přirozená čísla, jejich počet není nekonečný. Proto je s použitím počítače možné nalézt řešení metodou zkoušek a omylů, zejména když se výsledky porovnávají s cílovými hodnotami a nemožné kombinace se vyloučí. Tuto techniku fluktuací lze srovnávat s procesem, jakým soustava hledá svou rovnováhu.

Začneme s vektorem odhadu \mathbf{y} . Po násobení maticí \mathbf{M} dostaneme vektor odhadu \mathbf{g} . Při jeho srovnání s cílovým vektorem \mathbf{b} dostaneme diferenci $d(\mathbf{g} - \mathbf{b})$. Pokud je nulová, náš odhad je totožný s hledaným vektorem a můžeme naše hledání skončit. Podobně pokud diference $d(\mathbf{g} - \mathbf{b})$ je zanedbatelná, můžeme naše hledání skončit. Jinak musíme opravit vektor odhadu s použitím $d(\mathbf{g} - \mathbf{b})$. Avšak nemůžeme použít celou diferenci, protože příští odhad by mohl být jako kyvadlo na druhé straně správné hodnoty. Musíme fluktuace zmenšovat. Oprava musí být menší než diference, což se dosáhne s použitím konstanty c : $0 < c < 1$. Pokud vybereme konstantu příliš malou, potřebujeme příliš mnoho kroků, abychom našli přijatelnou hodnotu \mathbf{g} , pokud c je příliš blízké k 1, výsledky by mohly kolísat, podobně jak to bylo ukázané pro Markovovy matice.

Chapter 19

Entropické míry a informace

19.1 Vzdálenosti a logaritmy

Možná víte, že informace se může měřit svou entropií

$$H = -\sum p_j \log_2 p_j \quad (19.1)$$

kde součet se provádí přes všechny pravděpodobnosti p_j objektů (symbolů). Tyto pravděpodobnosti jsou neznámé a zatím je ponecháme nedefinované.

Nikdo se nesnažil vysvětlit, proč tato funkce je vhodná jako míra, byla jen zavedena jako axiom. Teď definujeme tuto funkci jako jednoduchý výsledek mapování m objektů na vrcholy mnohorozměrné jednotkové krychle nebo rovnocenně indexování těchto objektů pravidelným kódem sestávajícím se z 0 a 1 symbolů nebo jednoduše s použitím binární číselné stupnice mající stejný počet číslic:

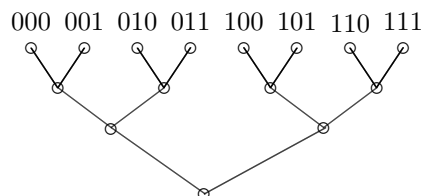
| | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| Decimálně | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Binárně | 000 | 001 | 010 | 011 | 100 | 101 | 110 | 111 |

Nejmenší nutný počet číslic pro každý objekt z m objektů je blízký k $\log_2 m$. Tyto číslice počítají hrany binárního rozhodovacího grafu, na jehož listech jsou umístěny počítané objekty (obr.)¹.

Pro všechny m objekty potřebujeme alespoň $m \log_2 m$ číslic (v ukázaném příkladě 24 číslic). Tuto limitu lze získat pouze pokud m jsou mocniny 2. Nicméně můžeme používat pro elementární výpočty logaritmy s uspokojující přesností. Počet číslic m_j je vzdálenost listů j od kořene v rozhodovacím stromu. Tedy logaritmy jsou ve vztahu ke vzdálenostem.

¹Uspořádejte, prosím, listy na vrcholy krychle a nakreslete si rozhodovací strom sami. Zkoušel jsem to, avšak můj obrázek byl příliš ošklivý. Krychle stejně jako rozhodovací strom musí být deformovaná

Figure 19.1: Binární rozhodovací strom je isomorfní s indexováním m objektů binárními číslicemi



Když víme, že $3^5 = 243$, konstruujeme binární rozhodovací strom s 1937 hranami

- $128 * 8 = 1024$
- $64 * 8 = 512$
- $32 * 8 = 256$
- $16 * 8 = 128$

Doposud se využilo plně 15 větví s 16 listy z 16 kmenů čtvrtého stupně pro indexování 240 listů (objektů) s 1920 číslicemi. Kratší strom rašící z posledního kmene se použije pro poslední tři listy

- $2 * 6 = 12$
- $1 * 5 = 5$

Součet vzdáleností listů od kořene je 1937. Tedy $1937 : 243 = 7.971$. Výsledek dělení je průměrná vzdálenost, která se rovná $\log_2 3^4$. Odhad binárního logaritmu 3 je $7.971 : 5 = 1.597$. Poněvadž $\lg_2 3 = 1.585$, přesnost pro takový jednoduchý výpočet je dobrá a mohla by se vylepšit s použitím vyšších mocnin hledaného čísla, které jsou blízké k mocnině základního čísla.

Výpočty lze provést pro jakéhokoli přirozený počet větví. Jako příklad: $5^{10} = 9765625$. Odpovídající zakořeněný strom s 10 větvemi má délku 7. Děleno 10 dostaneme 0.70000. Tabulková hodnota (získaná počítačkou) je $\log_{10} 5 = 0.69897$.

Po tomto odbočení se vrátíme k funkci entropie. Pokud máme nějaké informace o počítaných objektech, nutný počet číslic lze snížit. Předpokládejme, že objekty jsou už indexovány n symboly abecedy. Nové indexování lze složit ze dvou částí, symbolu j a binárního kódu zvláštního pro každý zvláštní symbol. Nyní potřebujeme pouze $\sum m_j \log_2 m_j$ symboly. Diference

$$H = m \log_2 m - \sum_{j=1}^n m_j \log_2 m_j = \sum m_j \log(m_j/m) \quad (19.2)$$

bude mírou informace o počítaných objektech získané dělením množiny m objektů do n označených podmnožin. Zavedením $p_j = m_j/m$ a dělením výsledku číslem m , dostaneme entropii H_m vztahenou na 1 objekt.

Například řada *aaaabbbcd* a její permutace vyžadují pouze 10 číslic:

| | | | | | | | | |
|-----------|-----|-----|-----|-----|----|----|---|---|
| Decimálně | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Binárně | a00 | a01 | a10 | a11 | b0 | b1 | c | d |

Normalizovaná difference vzhledem k úplnému stromu $H = (24-10)/8 = 1.75$ je informační entropie řady².

Na neštěstí tento jednoduchý výklad nevysvětluje funkci entropie H . To je pouze aproximace jedné její formy založené na binárních logaritmech.

19.2 Boltzmannova funkce entropie H_n

Na Boltzmannově hrobu je vyryt vzorec

$$S = -k \ln W, \quad (19.3)$$

kde S zastupuje pro termodynamickou entropii, W jako Wahrscheinlichkeit znamená pravděpodobnost a k je konstanta pojmenovaná na počest Boltzmannova. Tento vzorec byl příčinou jeho smrti. Zemřel vyčerpán marným úsilím jej dokázat. I jeho přátelé vymýšleli aporey, aby znemožnili Boltzmannovu myšlenku. Jeho tragedií bylo, že nikdo nerozuměl jeho důkazu, který se pokouším vysvětlit v této knize.

Entropii definoval Clausius její diferencí. Difference entropie je poměr mezi specifickým teplem Q potřebným pro zvýšení teploty T nějaké látky a T : $dS = dQ/T$. Pokud by specifické teplo bylo konstantní, integrovaná forma by byla

$$S = C \log T + S_0. \quad (19.4)$$

Předpokládá se, že entropie při absolutní nule je nulová. Tedy integrační konstanta S_0 musí být $-C \log 0$. Avšak entropie je mnohem složitější funkce, protože specifické teplo Q závisí na teplotě a má singularity, jako jsou teplota tání a odpařování. Soustředíme se na fakt, že entropie je logaritmickou funkcí teploty. Co je teplota? To je míra tepelného pohybu molekul³. V soustavě ideálního plynu molekuly reprezentované body se pohybují náhodně a pokud se srazí, vymění si svou kinetickou energii, avšak celkové množství energie při konstantní teplotě zůstává konstantní. Mimo to, pokud soustava zůstává izolovaná, rozdělení energií molekul dosahuje spontánně rovnovážný stav. To je největší orbita, na které soustava je stálá pro dlouhá časová období.

Funkce entropie se považuje za tajemnou. Nejen pro svou abstraktní formu (necítíme ji přímo jako teplotu, tlak a objem), avšak pro její vlastnosti. Zvyšuje se samovolně. Snížení entropie vyžaduje vnější akci.

²Recenzent prestižního vzdělávacího časopisu tomu nevěřil a zamítnul můj článek.

³Podle sofistikovanější definice je T integrující faktor.

Ukázali jsme, že plochy konstantní energie ve fázovém prostoru jsou roviny ortogonální k jednotkovému vektoru \mathbf{I} . Soustava ideálního plynu se pohybuje na této rovině a po většinu času zůstává na každé orbitě úměrně k jejímu objemu. Tedy soustava existuje na největší orbitě nebo orbitách k ní nejbližších po většinu času. Už známe vzorec pro vyhodnocení objemů jednotlivých orbit. Tím je polynomiální koeficient pro n permutace $n!/\Pi n_k!$. Logaritmus tohoto koeficientu byl navržen Boltzmannem jako matematický ekvivalent entropie, H funkce. Pokud n a n_k jsou velká čísla, což v případě ideálního plynu jistě jsou (Avogadrovo číslo, určující počet molekul v 1 molu plynu, je řádu 10^{23}), může použít se Stirlingova aproximace $n!$. Výsledek je

$$H_n = -\sum (n_k/n) \log n_k/n. \quad (19.5)$$

Tento výsledek se může získat pouze s přirozenými logaritmy na rozdíl od informační entropie.

Boltzmannovým problémem bylo, že se pouze domníval o existenci kvant energie (byly objeveny v čase Boltzmannovy smrti Planckem), a že místo aby mluvil o symetrii orbit rozdělení, zavedl špatně definované pravděpodobnosti p_k , které nahradily pravé podíly n_k/n .

Jeden paradox vznesený proti Boltzmannovi byl spojen s časovou inverzí. Klasická mechanika předpokládala, že čas lze obrátit. Avšak takové inverze času by měla vést ke snížení entropie. To by se mohlo brát jako důkaz proti H teorémě. Ukázali jsme, že prostor není necitlivý ke změnám znaménka, záporný kónus má zcela rozdílné vlastnosti než kladný. Nicméně změny znaménka entropie pouze klasifikují přirozené procesy. Můžeme říci, že pokud by časová inverze vedla ke snížení entropie soustavy, potom tato časová inverze není spontánní jev, poněvadž jeho příčina by ležela mimo soustavu.

19.3 Maximální H_n entropie

Hledání maximálních hodnot funkce 19.5 se zdá být snadnou úlohou. Entropie H_n je maximální, když všechny hodnoty $n_j = 1$. Tato monotónní řešení má chybu: Lze je uskutečnit pouze při speciálních hodnotách aritmetického průměru m/n . Součet aritmetické řady 1 až n je $\binom{n+1}{2}$, tedy aritmetický průměr hodnoty m_j nutné pro lineární rozdělení je $(n-1)/2$, jedna polovina počtu objektů. Tato hodnota je přijatelná pouze u malých systémů.

U rozsáhlých systémů, jako jsou molekuly plynu, monotónní rozdělení je nedosažitelné. Avogadrovo číslo N je 6.023×10^{23} (jeden mol vodíku váží asi dva gramy), Boltzmannova konstanta k ($k = R/N$) je 1.38×10^{-23} Joule/grad a konstanta R je 8.314 Joule/grad. Monotónní rozdělení by vyžadovalo teploty v kelvinech v řádu Avogadrova čísla.

Rozdělení molekul plynu nemůže být monotónní.. Nicméně to musí být tak ploché, jak je to možné.

Prozkoumáme nejprve vztahy průměrů některých šikmých rozdělení.

Přímkové sklony

| | | | | | | | |
|------------------|---|---|---|---|---|---|----------------------------|
| n_k | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | $\sum 21 = \binom{k+1}{2}$ |
| m_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| $n_k \times m_k$ | 0 | 5 | 8 | 9 | 8 | 5 | $\sum 35 = \binom{k+1}{3}$ |

dávají aritmetický průměr $(k-1)/3$, přibližně $\sqrt{2n}/3$.

Exponenciální sklony

| | | | | | | | |
|------------------|----|----|----|----|---|---|--|
| n_k | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\sum 63 = 2^6 - 1 = 2^{k+1} - 1$ |
| m_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | |
| $n_k \times m_k$ | 0 | 16 | 16 | 12 | 8 | 5 | $\sum 57 = 2^6 - 7 = 2^{k+1} - 2k + 1$ |

mají aritmetický průměr pro všechny velikosti poněkud menší než 1. Když m_k hodnoty vycházejí od nejnižší hodnoty r , aritmetický průměr budou vždy $r+1$, poněvadž přidáme k základnímu rozdělení $r \times 2^{k+1} - 1$ jednotek. Exponenciální sklony lze napřímit kombinováním několika takových rozdělení:

| | | | | | | | | | |
|------------------|---|---|---|----|---|----|---|---|--------------------------------|
| n_k | 8 | 8 | 4 | 4 | 2 | 2 | 1 | 1 | $\sum 30 = 2 \times (2^4 - 1)$ |
| m_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
| $n_k \times m_k$ | 0 | 8 | 8 | 12 | 8 | 10 | 6 | 7 | $\sum 59$ |

Aritmetický průměr roste pomalu a sklony lze napřímit vyrovnaním sousedních hodnot.

Rozdělení může být symetrické.

Přímkové rozdělení ve tvaru sedlové střechy dává poněkud lepší výsledek než monotónní rozdělení: Jeho aritmetický průměr je v intervalu odmocniny n :

| | | | | | | | | |
|------------------|---|---|---|----|----|----|---|--------------------------|
| n_k | 1 | 2 | 3 | 4 | 3 | 2 | 1 | $\sum 16 = 4^2$ |
| m_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| $n_k \times m_k$ | 0 | 2 | 6 | 12 | 12 | 10 | 6 | $\sum 48 = 3 \times 4^2$ |

Binomické rozdělení dává tento výsledek

| | | | | | | | | |
|------------------|---|---|----|----|----|----|---|---------------------------|
| n_k | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 | $\sum 64 = 2^6$ |
| m_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| $n_k \times m_k$ | 0 | 6 | 30 | 60 | 60 | 30 | 6 | $\sum 192 = 3 \times 2^6$ |

Pokud $n = 2^k$, potom aritmetický průměr binomiálního rozdělení je $k/2$. Pro Avogadrovo číslo $k \simeq 79$ ($2^{79} = 6.045 \times 10^{23}$). Aritmetický průměr je velmi nízký. To znamená, že rozdělení může být plošší a obsahuje více hodnot než 80.

Plošší binomické rozdělení lze modelovat jako

| | | | | | | | | | | | |
|------------------|---|---|---|----|----|----|----|----|---|---|---------------------------|
| n_k | 1 | 1 | 4 | 4 | 6 | 6 | 4 | 4 | 1 | 1 | $\sum 32 = 2 \times 2^4$ |
| m_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | |
| $n_k \times m_k$ | 0 | 1 | 8 | 12 | 24 | 30 | 24 | 28 | 8 | 9 | $\sum 144 = 9 \times 2^3$ |

Entropii lze opět zvýšit vyrovnaním sklonu jako 1, 2, 3, 5, 5 . . .

Vzestupné a sestupné exponenciální sklony:

| | | | | | | | | |
|------------------|---|---|---|----|----|----|----|-------------------------------|
| n_k | 1 | 2 | 4 | 8 | 4 | 2 | 1 | $\sum 22 = 2^3 - 1 + 2^4 - 1$ |
| m_k | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | |
| $n_k \times m_k$ | 0 | 2 | 8 | 24 | 16 | 10 | 12 | $\sum 72$ |

Rozdělení je složené ze dvou složek. Klesající exponenciální sklon s $n = 2^{k+1} - 1$ částmi má průměrnou hodnotu $k + 1$. Vzestupný exponenciální sklon s $n = 2^k - 1$ částmi má součet $n_k \times m_k = \sum_{k=0}^{k-1} k 2^k$. Jeho průměrná hodnota je poněkud větší než $(k-2)$, avšak menší než k , poněvadž poslední člen v součtu je rozhodující. Aritmetický průměr je přibližně k . Exponenciální sklony lze opět napravit jako dříve.

Entropie H_n by byla maximální, kdyby rozdělení bylo tak ploché, jak je to možné a blížilo se k monotónnímu rozdělení. Pokud existuje dosti místa pro všechny části, rozdělení budou symetrická a jinak mohou být šikmá jeden.

19.4 Shannonova funkce entropie H_m

Konstatování z abstraktu v Chemical Abstracts [15]: "Boltzmannova entropie je informační entropií", je typické pro současný stav. Obecně se věří, že Shannonova funkce entropie H_m je dokonaleji a tedy lépe definována než Boltzmannova funkce entropie H_n . Avšak obě funkce měří příbuzné avšak nicméně rozdílné vlastnosti. Ty mohou dokonce být aditivní.

Můžeme spekulovat, kdo byl tou bludičkou, kdo změnil velké tajemství spojené s entropií na ještě větší chybu. Její důsledky jsou rozseté z matematiky do fyziky, biologie, sociálních věd až k filosofii.

J. Von Neumann dal Shannonovi tuto radu [16]:

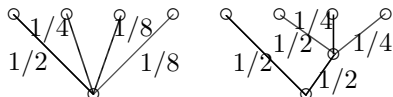
"Měl byste to nazvat entropií ze dvou důvodů. V první řadě Vaše funkce nejistoty se používá v statistické mechanice pod tímto jménem, takže už má jméno. V druhé řadě, což je důležitější, nikdo neví, co entropie opravdu je, a tak v debatě budete vždy mít výhodu."

Základní idea Boltzmannova důkazu H teoremu nebyla pochopena a zůstala tajemná (Kac [17] "demonstrace").

Ukázali jsme odvození rovnice 19.1 a co to měří. Shannon vybral funkci H záměrně z poněkud jiného důvodu. Zajímaly jej četnosti symbolů ve zprávách (nebo podíly jednotlivých četností m_j jednotlivých symbolů j k celkovému počtu m všech symbolů m_j/m). Funkce H je aditivní, když se rozhodování štěpí jako na obr. 19.2

Nejdůležitější rozdílem 19.2 vzhledem 19.5 je maximální hodnota obou funkcí. H_m je maximální, když všech symbolů mají stejnou četnost, což se rovná aritmetickému průměru $\bar{m} = m/n$. Potom $n_{m/n} = n$ (jiné $n_k = 0$) a entropie H_n je minimální, nulová. Entropie H_m má hromadící účinek na rozdělení. To snižuje jeho rozptyl.

Figure 19.2: Rozhodování ze čtyř možností



Fakt existence dvou funkcí entropie vysvětluje tak zvanou redundanci informace, poněvadž H_m v textech není maximální. Když m entropie je maximální, n entropie je minimální a jejich součet není optimální. Pokud by se všechny symboly objevily v naší řeči se stejnou četností, rozdíly mezi slovy by byly zanedbatelné a nesnadno by se poznávaly. Existuje 6 permutací $aabb$ a pouze 4 permutace $aaab$. Avšak existují také 4 řady $abbb$ a stejné rozdělení dají dohromady 8 řad.

Je lepší to vysvětlit na slovech jako základních vektorech informace. Musíme opakovat slova spojená s předmětem, o kterém mluvíme. Tato klíčová slova, která jsou nutná pro porozumění, jsou četnější. Změny četnosti slov ve zprávách podle jejich předmětů nám dává možnost formulovat více rozdílných zpráv než pokud by se všechna slova používala rovnoměrně a bezprostředně poznávat, o čem se mluví.

Ukázali jsme jednoduchou interpretaci informační entropie. Nyní zavedeme tuto funkci jako analogii Boltzmannovy funkce entropie H_n . To je logaritmická míra polynomiálního koeficientu pro n permutace $n!/P_i n_k!$. Existuje polynomiální koeficient pro m permutace $m!/P_i m_j! = m!/P_i m_k!^{n_k}$.

Existují tedy dva polynomiální koeficienty, jeden pro n permutace, jiný pro m permutace. Jaké jsou vlastnosti polynomiálního koeficientu pro n permutace?

Tento koeficient určuje kolik řad lze vytvořit z m symbolů na abecedě n symbolů. Jinými slovy, kolik míst existuje pro rozdílné zprávy.

Koeficient

$$m! / \prod_{j=1}^n n_j = \prod_{k \geq 1} n_k!^{m_k} \quad (19.6)$$

lze modifikovat podobně jako v případě 19.5 s použitím Stirlingovy aproximace m faktoriálů. Výsledek má stejnou formu jako 19.5, vyjma toho, že p_k jsou relativní četnosti jednotlivých symbolů.

19.5 Vzdálenosti a entropie

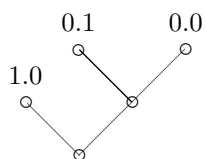
Odpověď na otázku, tolik andělů se vejde na špičce jehly, není úlohou matematiky, avšak analýza práce Maxwellova démona je, poněvadž tato kreatura je ještě s námi nejen ve fyzice ale také v teorii informace.

Démon transformoval smíšenou řadu chladných molekul c a horkých molekul h

Table 19.1: Logické funkce

| | | | |
|--------------|-------|------------|----------------------------|
| konjunkce: | | pokud p q, | potom (p a q) |
| alternativa: | | pokud p q, | potom (p nebo q) |
| implikace: | | pokud p q, | potom (p je q) |
| | p q | konjunkce | alternativa implikace |
| | 1 1 | 1 | 1 |
| | 1 0 | 0 | 1 |
| | 0 1 | 0 | 0 |
| | 0 0 | 0 | 1 |

Figure 19.3: Rozhodovací strom. Levá větev znamená 1, pravá větev znamená 0. Kořen se bere jako desetinná čárka



Chapter 20

Literatura

- [1] J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis, John Wiley, New York, 1958.
- [2] L. Boltzmann, šber die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatze der mechanischen W"rmetheorie und die Wahrscheinlichkeitsrechnung, *Wiener Berichte* **1877**, 76, 373.
- [3] C. E. Shannon, The Mathematical Theory of Communication, *Bell System Technical Journal*, **1948**, 27, 379, 623.
- [4] J. Hašek, The Brave Soldier Švejk.
- [5] M. Kunz, What is Entropy (in Czech), *Věda a technika mládeži*, **1979**, 33, 552, , 616.
- [6] W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, J. Willey, New York, 1970, Chapter 10.4.
- [7] W. Heissenberg in The Physicist's Conception of Nature, Ed. J. Mehra, D. Reidel, Dortrecht, **1968**, p. 267.
- [8] M. Hall Jr., Combinatorial Theory, Blaisdell Publ. Comp., Waltham, 1967.
- [9] F. Harary, Graph Theory, Addison-Wesley, Reading, 1969.
- [10] F. Harary, E. M. Palmer, Graphical Enumeration, Academic Press, New York, 1973
- [11] D. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, Spectra of Graphs, Deutcher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980.
- [12] G. E. Andrews, The Theory of Partitions, Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, MA, 1976.
- [13] S. Weinberg, Mathematics, the Unifying Thread in Science, Notices AMS, 1986, 716.
- [14] J. Wei, C. D. Prater, Structure and analysis of complex reaction systems. In D.D. Eley, P. W. Selwood, P. B. Weisz Eds., Advances in Catalysis, Vol. XIII, 203-392, Academic Press, New York, 1962.
- [15] E. B. Chen, Boltzmann Entropy, Relative Entropy and Related Quantities in Thermodynamic Space, *J. Chem. Phys.*, **1995**, 102, 7169-79; CA 122: 299958.

[16] M. Tribus, E. C. McIrvine, Energy and Information, *Scientific American*, **1971**, 225, 3, 179.

[17] M. Kac in J. Mehra, Ed. The Physicist's Conception of Nature, Reidel, Dordrecht, 1973, p.560.

M. Kunz, A Note about the Negentropy Principle, *MATCH*, **1988**, 23, 3.