

# Wilcoxon's Signed-Rank Distribution

Mirko Junge

[http://www.geocities.com/junge\\_m](http://www.geocities.com/junge_m)

## Voraussetzungen zur Anwendung[4][6][7]

Betrachtet werden die  $n'$  abhängigen Stichproben aus einer stetigen Grundgesamtheit. Die Einzelwerte  $x_{i,1}$  und  $x_{i,2}$ , ( $i = 1, 2, \dots, n'$ ) gehören aus sachlichen Gründen paarweise zusammen. Bezeichne  $n$  die Zahl der reduzierten Stichproben, also diejenigen für die

$$d_i = x_{1,i} - x_{2,i} \neq 0 \quad (1)$$

gilt. Der Test für die reduzierte Stichprobe ist statistisch stärker als der Test für  $\sum_{d_i > 0} 1 + \frac{1}{2} \sum_{d_i = 0} 1$ , also der für die Originalstichprobe, da die kritische Region des Tests für die Originalstichprobe eine Teilmenge des Tests für die reduzierte Stichprobe ist [3].

Ist der reduzierte Stichprobenumfang nicht ausreichend, so kann bei gegebenen  $\alpha$  keine Aussage bezüglich der Nullhypothese getroffen werden; in diesen Fällen steht in der nachfolgenden Tabelle ein '–'.

## Vorgehensweise [1, S. 104f][2, S. 194f]

Für jedes Wertepaar des reduzierten Stichprobenumfanges wird die Differenz

$$d_i = x_{i,1} - x_{i,2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

gebildet, Paare mit gleichen Einzelwerten werden also fortgelassen.

Die Beträge  $|d_i|$  der so erhaltenen  $n$  von Null verschiedenen Differenzen  $d_i$  werden in eine Rangfolge gebracht, d.h. sie werden der Größe nach geordnet und ausgehend vom kleinsten Betrag mit den Rangzahlen  $1, 2, 3, \dots, n$  versehen. Sind die nach Größe geordneten Beträge  $v$  bis  $(v+c)$  gleich, dann erhält jeder dieser  $(c+1)$  Beträge die Rangzahl  $v + c/2$ . Zu jeder Rangzahl wird vermerkt, ob die zugehörige Differenz positiv oder negativ ist.

Man bildet die Summe  $W^+$  der zu positiven Differenzen gehörenden Rangzahlen und die Summe  $W^-$  der zu negativen Differenzen gehörenden Rangzahlen:

$$W^+ = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \left( \frac{d_i}{|d_i|} + 1 \right) \text{Rang}[d_i] \quad (3)$$

$$W^- = \sum_{i=1}^n -\frac{1}{2} \left( \frac{d_i}{|d_i|} - 1 \right) \text{Rang}[d_i] \quad (4)$$

Hierbei bezeichnet 'Rang[ $d_i$ ]' die Rangzahl der Differenz  $d_i$ .

Als Kontrolle kann man die Beziehung

$$W^+ + W^- = \frac{n(n+1)}{2} \quad (5)$$

benutzen.

## Testen der Hypothesen

Hypothese  $H_1$ : Die beiden Stichproben stammen aus der gleichen Grundgesamtheit:  $F_1(x) = F_2(x)$ .

| Gegenhypothese       | Verwerfen der Hypothese $\Phi_1(x) = \Phi_2(x)$ für |                       |
|----------------------|-----------------------------------------------------|-----------------------|
|                      | Prüfgröße                                           | Schwellenwert         |
| $F_1(x) > F_2(x)$    | $W^+ = \frac{n(n+1)}{2} - W^-$                      | $\leq W[\alpha, n]$   |
| $F_1(x) < F_2(x)$    | $W^- = \frac{n(n+1)}{2} - W^+$                      | $\leq W[\alpha, n]$   |
| $F_1(x) \neq F_2(x)$ | $W^{\min} = \min[W^+, W^-]$                         | $\leq W[\alpha/2, n]$ |

## Die Tabelle

Die in der Tabelle dargestellte Funktion  $W[\alpha, n]$  beschreibt die unteren Grenzen für  $W^+$  bei einem reduzierten Stichprobenumfang von  $n$  und einem Signifikanzniveau von  $P$ , bei dem der Wilcoxon Vorzeichen-Rangfolge-Test noch trennt, die Nullhypothese also verworfen werden muß.

Die tabulierte Funktion  $W[\alpha, n]$  ist das größte  $W$ , so daß  $Pr(W^+ \leq W) \leq \alpha$ . Ein Strich ('–') zeigt an, daß es kein Wert der Rangzahlsumme gibt, die die geforderten Bedingung erfüllt.

$W^-$  beschreibt die Summe der Rangzahlen bei denen die Differenz  $d_i$  negativ ist. Sie besitzt die gleiche Verteilung wie  $W^+$  mit einem Mittelwert

$$\mu = \frac{1}{2} (W^+ + W^-) = \frac{1}{4} n(n+1) \quad (6)$$

und einer Varianz

$$\sigma^2 = \frac{1}{12} n(n+1)(n + \frac{1}{2}) \quad (7)$$

Für große Werte von  $n$ , z.B.  $n > 25$ , ist  $W^+$  angenähert normalverteilt [1, S. 105][2, S. 195][5] mit

$$\begin{aligned} W[\alpha, n] &= \\ &= \frac{n(n+1)}{4} - u_{(1-\alpha)} \sqrt{\frac{1}{24} n(n+1)(2n+1)} \end{aligned} \quad (8)$$

wobei

$$N(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{t^2/2} dt \quad (9)$$

### Beispiel

Das Gesichtsfeld eines Patienten werde durch das Sehen oder Nichtsehen von 32 einzelnen Punkten beschrieben. Man vergleiche das Gesichtsfeld vor und nach einer den Schielwinkel korrigierenden Augenoperation.

| Gesichtsfeldpunkte |         | Sign | $d_i$ | Rang |
|--------------------|---------|------|-------|------|
| vorher             | nachher |      |       |      |
| 6                  | 6       |      | 0     | —    |
| 6                  | 16      |      | 10    | 10   |
| 14                 | 17      |      | 3     | 5.5  |
| 16                 | 19      |      | 3     | 5.5  |
| 9                  | 9       |      | 0     | —    |
| 13                 | 16      |      | 3     | 5.5  |
| 9                  | 15      |      | 6     | 9    |
| 14                 | 18      |      | 4     | 8    |
| 3                  | 5       |      | 2     | 2    |
| 29                 | 32      |      | 3     | 5.5  |
| 21                 | 21      |      | 0     | —    |
| 9                  | 7       | —    | 2     | 2    |
| 14                 | 12      | —    | 2     | 2    |
| 3                  | 3       |      | 0     | —    |

Mit Hilfe der Rang-Tabelle bestimmt man den Umfang der reduzierten Stichprobe zu  $n = 10$  und berechnet man leicht:  $W^+ = 51$  und  $W^- = 4$ .

Es soll die Hypothese ‘die beiden Stichproben stammen aus der gleichen Grundgesamtheit’ gegen die Hypothese ‘der Mittelwert der Grundgesamtheit der Gruppe der Operierten ist größer als die der Grundgesamtheit vor der Operation’. Es wird also der maximale Wert von  $\alpha$  gesucht, für den  $W[\alpha, 10]$  kleinergleich  $W^-$  ist, also

$$\max\{\alpha | W^- \geq W[\alpha, 10]\} \tag{10}$$

Aus der Tabelle für die Verteilung der Wilcoxon’s Signed-Rank Distribution<sup>1</sup>  $W[\alpha, n]$  erhält man für  $n = 10$  die Werte:

| n  | $\alpha$ |      |       |      |       |        |       |
|----|----------|------|-------|------|-------|--------|-------|
|    | 0.10     | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.0025 | 0.001 |
| 10 | 14       | 10   | 8     | 5    | 3     | 1      | 0     |

Die Hypothese daß die Stichproben aus der gleichen Grundgesamtheit stammen kann mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit  $p < 0.01$  verworfen werden.

### Literatur

- [1] Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik  
Graf, U.; Henning, H.-J.; Stange, K.  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York  
2. Auflage, 1966
- [2] Formeln und Tabellen der angewandten mathematischen Statistik  
Graf, U.; Henning, H.-J.; Stange, K.; Willrich, P.-Th.  
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo  
3. Auflage, 1987
- [3] A Theorem on the Sign Test when Ties are present  
Hemelrijk, J.  
Indagationes math. 14  
Proc. Kon. Nederl. Akad. Wet. 55, Seite 322-326
- [4] New Cambridge Elementary Statistic Table  
Lindley; Scott  
Cambridge University Press, 1984
- [5] Critical Values for the Wilcoxon Signed Rank Statistic  
Mitic, Peter  
The Mathematica Journal Vol. 6(1996), No. 3, S. 73-77
- [6] Some Rapid Approximate Statistical Procedures  
Wilcoxon, F.; Wilcox, R.A.  
American Cyanamid Company, 1964, S. 28
- [7] Critical Values and Probability Levels for the Wilcoxon Rank Sum Test and the Wilcoxon Signed Rank Test  
Wilcoxon, Frank; Katti, S.K.; Wilcox, Roberta A.  
in: Selected Tables in Mathematical Statistics (Volume 1) Harter, H.L.; Owen, D.B.  
American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1973

<sup>1</sup>Eine umfassende Tabelle befindet sich im Anhang, sowie bei Lindley [4] als auch bei Wilcoxon [6, S. 28ff] und [7] in Verbindung mit [5].

Wilcoxon’s Signed-Rank Distribution

$W[\alpha, n]$

| n   | $\alpha$ |      |       |      |       |        |       |
|-----|----------|------|-------|------|-------|--------|-------|
|     | 0.10     | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.0025 | 0.001 |
| 1   | —        | —    | —     | —    | —     | —      | —     |
| 2   | —        | —    | —     | —    | —     | —      | —     |
| 3   | —        | —    | —     | —    | —     | —      | —     |
| 4   | 0        | —    | —     | —    | —     | —      | —     |
| 5   | 2        | 0    | —     | —    | —     | —      | —     |
| 6   | 3        | 2    | 0     | —    | —     | —      | —     |
| 7   | 5        | 3    | 2     | 0    | —     | —      | —     |
| 8   | 8        | 5    | 3     | 1    | 0     | —      | —     |
| 9   | 10       | 8    | 5     | 3    | 1     | 0      | —     |
| 10  | 14       | 10   | 8     | 5    | 3     | 1      | 0     |
| 11  | 17       | 13   | 10    | 7    | 5     | 3      | 1     |
| 12  | 21       | 17   | 13    | 9    | 7     | 5      | 2     |
| 13  | 26       | 21   | 17    | 12   | 9     | 7      | 4     |
| 14  | 31       | 25   | 21    | 15   | 12    | 9      | 6     |
| 15  | 36       | 30   | 25    | 19   | 15    | 12     | 8     |
| 16  | 42       | 35   | 29    | 23   | 19    | 15     | 11    |
| 17  | 48       | 41   | 34    | 27   | 23    | 19     | 14    |
| 18  | 55       | 47   | 40    | 32   | 27    | 23     | 18    |
| 19  | 62       | 53   | 46    | 37   | 32    | 27     | 21    |
| 20  | 69       | 60   | 52    | 43   | 37    | 32     | 26    |
| 21  | 77       | 67   | 58    | 49   | 42    | 37     | 30    |
| 22  | 86       | 75   | 65    | 55   | 48    | 42     | 35    |
| 23  | 94       | 83   | 73    | 62   | 54    | 48     | 40    |
| 24  | 104      | 91   | 81    | 69   | 61    | 54     | 45    |
| 25  | 113      | 100  | 89    | 76   | 68    | 60     | 51    |
| 26  | 124      | 110  | 98    | 84   | 75    | 67     | 58    |
| 27  | 134      | 119  | 107   | 92   | 83    | 74     | 64    |
| 28  | 145      | 130  | 116   | 101  | 91    | 82     | 71    |
| 29  | 157      | 140  | 126   | 110  | 100   | 90     | 79    |
| 30  | 169      | 151  | 137   | 120  | 109   | 98     | 86    |
| 31  | 181      | 163  | 147   | 130  | 118   | 107    | 94    |
| 32  | 194      | 175  | 159   | 140  | 128   | 116    | 103   |
| 33  | 207      | 187  | 170   | 151  | 138   | 126    | 112   |
| 34  | 221      | 200  | 182   | 162  | 148   | 136    | 121   |
| 35  | 235      | 213  | 195   | 173  | 159   | 146    | 131   |
| 36  | 250      | 227  | 208   | 185  | 171   | 157    | 141   |
| 37  | 265      | 241  | 221   | 198  | 182   | 168    | 151   |
| 38  | 281      | 256  | 235   | 211  | 194   | 180    | 162   |
| 39  | 297      | 271  | 249   | 224  | 207   | 192    | 173   |
| 40  | 313      | 286  | 264   | 238  | 220   | 204    | 185   |
| 41  | 330      | 302  | 279   | 252  | 233   | 217    | 197   |
| 42  | 348      | 319  | 294   | 266  | 247   | 230    | 209   |
| 43  | 365      | 336  | 310   | 281  | 261   | 244    | 222   |
| 44  | 384      | 353  | 327   | 296  | 276   | 258    | 235   |
| 45  | 402      | 371  | 343   | 312  | 291   | 272    | 249   |
| 46  | 422      | 389  | 361   | 328  | 307   | 287    | 263   |
| 47  | 441      | 407  | 378   | 345  | 322   | 302    | 277   |
| 48  | 462      | 426  | 396   | 362  | 339   | 318    | 292   |
| 49  | 482      | 446  | 415   | 379  | 355   | 334    | 307   |
| 50  | 503      | 466  | 434   | 397  | 373   | 350    | 323   |
| 51  | 525      | 486  | 453   | 416  | 390   | 367    | 339   |
| 52  | 547      | 507  | 473   | 434  | 408   | 384    | 355   |
| 53  | 569      | 529  | 494   | 454  | 427   | 402    | 372   |
| 54  | 592      | 550  | 514   | 473  | 445   | 420    | 389   |
| 55  | 615      | 573  | 536   | 493  | 465   | 439    | 407   |
| 56  | 639      | 595  | 557   | 514  | 484   | 457    | 425   |
| 57  | 664      | 618  | 579   | 535  | 504   | 477    | 443   |
| 58  | 688      | 642  | 602   | 556  | 525   | 497    | 462   |
| 59  | 714      | 666  | 625   | 578  | 546   | 517    | 482   |
| 60  | 739      | 690  | 648   | 600  | 567   | 537    | 501   |
| 61  | 765      | 715  | 672   | 623  | 589   | 558    | 521   |
| 62  | 792      | 741  | 697   | 646  | 611   | 580    | 542   |
| 63  | 819      | 767  | 721   | 669  | 634   | 602    | 563   |
| 64  | 847      | 793  | 747   | 693  | 657   | 624    | 584   |
| 65  | 875      | 820  | 772   | 718  | 681   | 647    | 606   |
| 66  | 903      | 847  | 798   | 742  | 705   | 670    | 628   |
| 67  | 932      | 875  | 825   | 768  | 694   | 651    | 649   |
| 68  | 962      | 903  | 852   | 793  | 754   | 718    | 674   |
| 69  | 992      | 931  | 879   | 819  | 779   | 742    | 697   |
| 70  | 1022     | 960  | 907   | 846  | 805   | 767    | 721   |
| 71  | 1053     | 990  | 936   | 873  | 831   | 792    | 745   |
| 72  | 1084     | 1020 | 964   | 901  | 858   | 818    | 770   |
| 73  | 1116     | 1050 | 994   | 928  | 884   | 844    | 795   |
| 74  | 1148     | 1081 | 1023  | 957  | 912   | 871    | 821   |
| 75  | 1181     | 1112 | 1053  | 986  | 940   | 898    | 847   |
| 76  | 1214     | 1144 | 1084  | 1015 | 968   | 925    | 873   |
| 77  | 1247     | 1176 | 1115  | 1044 | 997   | 953    | 900   |
| 78  | 1282     | 1209 | 1147  | 1075 | 1026  | 981    | 927   |
| 79  | 1316     | 1242 | 1179  | 1105 | 1056  | 1010   | 955   |
| 80  | 1351     | 1276 | 1211  | 1136 | 1086  | 1039   | 983   |
| 81  | 1387     | 1310 | 1244  | 1168 | 1116  | 1069   | 1011  |
| 82  | 1423     | 1345 | 1277  | 1200 | 1147  | 1099   | 1040  |
| 83  | 1459     | 1380 | 1311  | 1232 | 1178  | 1129   | 1070  |
| 84  | 1496     | 1415 | 1345  | 1265 | 1210  | 1160   | 1099  |
| 85  | 1533     | 1451 | 1380  | 1298 | 1242  | 1191   | 1130  |
| 86  | 1571     | 1487 | 1415  | 1332 | 1275  | 1223   | 1160  |
| 87  | 1609     | 1524 | 1451  | 1366 | 1308  | 1255   | 1191  |
| 88  | 1648     | 1561 | 1487  | 1400 | 1342  | 1288   | 1223  |
| 89  | 1688     | 1599 | 1523  | 1435 | 1376  | 1321   | 1255  |
| 90  | 1727     | 1638 | 1560  | 1471 | 1410  | 1355   | 1287  |
| 91  | 1767     | 1676 | 1597  | 1507 | 1445  | 1389   | 1320  |
| 92  | 1808     | 1715 | 1635  | 1543 | 1480  | 1423   | 1353  |
| 93  | 1849     | 1755 | 1674  | 1580 | 1516  | 1458   | 1387  |
| 94  | 1891     | 1795 | 1712  | 1617 | 1552  | 1493   | 1421  |
| 95  | 1933     | 1836 | 1752  | 1655 | 1589  | 1529   | 1455  |
| 96  | 1976     | 1877 | 1791  | 1693 | 1626  | 1565   | 1490  |
| 97  | 2019     | 1918 | 1832  | 1731 | 1664  | 1601   | 1525  |
| 98  | 2062     | 1960 | 1872  | 1770 | 1702  | 1638   | 1561  |
| 99  | 2106     | 2003 | 1913  | 1810 | 1740  | 1676   | 1598  |
| 100 | 2151     | 2045 | 1955  | 1850 | 1779  | 1714   | 1634  |

|     | α    |      |       |      |       |        |       |
|-----|------|------|-------|------|-------|--------|-------|
| n   | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.01 | 0.005 | 0.0025 | 0.001 |
| 101 | 2195 | 2089 | 1997  | 1890 | 1818  | 1752   | 1671  |
| 102 | 2241 | 2133 | 2039  | 1931 | 1858  | 1791   | 1709  |
| 103 | 2287 | 2177 | 2082  | 1972 | 1898  | 1830   | 1747  |
| 104 | 2333 | 2222 | 2125  | 2014 | 1939  | 1870   | 1785  |
| 105 | 2380 | 2267 | 2169  | 2056 | 1980  | 1910   | 1824  |
| 106 | 2427 | 2312 | 2213  | 2099 | 2022  | 1950   | 1863  |
| 107 | 2475 | 2359 | 2258  | 2142 | 2063  | 1991   | 1903  |
| 108 | 2523 | 2405 | 2303  | 2186 | 2106  | 2032   | 1943  |
| 109 | 2572 | 2452 | 2349  | 2230 | 2149  | 2074   | 1984  |
| 110 | 2621 | 2500 | 2395  | 2274 | 2192  | 2117   | 2025  |
| 111 | 2671 | 2548 | 2442  | 2319 | 2236  | 2159   | 2066  |
| 112 | 2721 | 2596 | 2489  | 2364 | 2280  | 2202   | 2108  |
| 113 | 2771 | 2645 | 2536  | 2410 | 2325  | 2246   | 2150  |
| 114 | 2822 | 2695 | 2584  | 2456 | 2370  | 2290   | 2193  |
| 115 | 2874 | 2744 | 2632  | 2503 | 2415  | 2335   | 2236  |
| 116 | 2926 | 2795 | 2681  | 2550 | 2461  | 2380   | 2280  |
| 117 | 2978 | 2846 | 2731  | 2598 | 2508  | 2425   | 2324  |
| 118 | 3031 | 2897 | 2780  | 2646 | 2555  | 2471   | 2368  |
| 119 | 3085 | 2948 | 2831  | 2694 | 2602  | 2517   | 2413  |
| 120 | 3139 | 3001 | 2881  | 2743 | 2650  | 2564   | 2459  |
| 121 | 3193 | 3053 | 2933  | 2793 | 2698  | 2611   | 2505  |
| 122 | 3248 | 3106 | 2984  | 2843 | 2747  | 2658   | 2551  |
| 123 | 3303 | 3160 | 3036  | 2893 | 2796  | 2707   | 2598  |
| 124 | 3359 | 3214 | 3089  | 2944 | 2846  | 2755   | 2645  |
| 125 | 3416 | 3269 | 3142  | 2995 | 2896  | 2804   | 2692  |
| 126 | 3472 | 3324 | 3195  | 3047 | 2946  | 2853   | 2740  |
| 127 | 3530 | 3379 | 3249  | 3099 | 2997  | 2903   | 2789  |
| 128 | 3587 | 3435 | 3304  | 3152 | 3049  | 2953   | 2838  |
| 129 | 3645 | 3492 | 3359  | 3205 | 3100  | 3004   | 2887  |
| 130 | 3704 | 3548 | 3414  | 3258 | 3153  | 3055   | 2937  |
| 131 | 3763 | 3606 | 3470  | 3312 | 3205  | 3107   | 2987  |
| 132 | 3823 | 3664 | 3526  | 3367 | 3259  | 3159   | 3038  |
| 133 | 3883 | 3722 | 3583  | 3421 | 3312  | 3212   | 3089  |
| 134 | 3944 | 3781 | 3640  | 3477 | 3366  | 3264   | 3140  |
| 135 | 4005 | 3840 | 3697  | 3533 | 3421  | 3318   | 3192  |
| 136 | 4066 | 3900 | 3756  | 3589 | 3476  | 3372   | 3245  |
| 137 | 4128 | 3960 | 3814  | 3646 | 3531  | 3426   | 3298  |
| 138 | 4191 | 4020 | 3873  | 3703 | 3587  | 3481   | 3351  |
| 139 | 4254 | 4081 | 3933  | 3760 | 3644  | 3536   | 3405  |
| 140 | 4317 | 4143 | 3993  | 3819 | 3701  | 3592   | 3459  |
| 141 | 4381 | 4205 | 4053  | 3877 | 3758  | 3648   | 3514  |
| 142 | 4445 | 4268 | 4114  | 3936 | 3816  | 3704   | 3569  |
| 143 | 4510 | 4331 | 4175  | 3996 | 3874  | 3761   | 3624  |
| 144 | 4575 | 4394 | 4237  | 4055 | 3932  | 3819   | 3680  |
| 145 | 4641 | 4458 | 4299  | 4116 | 3991  | 3877   | 3737  |
| 146 | 4708 | 4522 | 4362  | 4177 | 4051  | 3935   | 3793  |
| 147 | 4774 | 4587 | 4425  | 4238 | 4111  | 3994   | 3851  |
| 148 | 4842 | 4652 | 4489  | 4300 | 4171  | 4053   | 3908  |
| 149 | 4909 | 4718 | 4553  | 4362 | 4232  | 4113   | 3967  |
| 150 | 4978 | 4785 | 4618  | 4425 | 4294  | 4173   | 4025  |
| 151 | 5046 | 4851 | 4683  | 4488 | 4355  | 4233   | 4084  |
| 152 | 5115 | 4919 | 4748  | 4551 | 4418  | 4294   | 4144  |
| 153 | 5185 | 4986 | 4814  | 4615 | 4480  | 4356   | 4204  |
| 154 | 5255 | 5054 | 4881  | 4680 | 4544  | 4418   | 4264  |
| 155 | 5326 | 5123 | 4948  | 4745 | 4607  | 4480   | 4325  |
| 156 | 5397 | 5192 | 5015  | 4810 | 4671  | 4543   | 4387  |
| 157 | 5468 | 5262 | 5083  | 4876 | 4736  | 4606   | 4448  |
| 158 | 5540 | 5332 | 5151  | 4943 | 4801  | 4670   | 4511  |
| 159 | 5613 | 5402 | 5220  | 5009 | 4866  | 4734   | 4573  |
| 160 | 5686 | 5473 | 5289  | 5077 | 4932  | 4799   | 4636  |
| 161 | 5759 | 5545 | 5359  | 5144 | 4999  | 4864   | 4700  |
| 162 | 5833 | 5617 | 5429  | 5213 | 5065  | 4930   | 4764  |
| 163 | 5908 | 5689 | 5500  | 5281 | 5133  | 4996   | 4828  |
| 164 | 5982 | 5762 | 5571  | 5350 | 5200  | 5062   | 4893  |
| 165 | 6058 | 5835 | 5643  | 5420 | 5269  | 5129   | 4959  |
| 166 | 6134 | 5909 | 5715  | 5490 | 5337  | 5196   | 5024  |
| 167 | 6210 | 5983 | 5787  | 5560 | 5406  | 5264   | 5091  |
| 168 | 6287 | 6058 | 5860  | 5631 | 5476  | 5332   | 5157  |
| 169 | 6364 | 6133 | 5934  | 5703 | 5546  | 5401   | 5224  |
| 170 | 6442 | 6209 | 6008  | 5775 | 5616  | 5470   | 5292  |
| 171 | 6520 | 6285 | 6082  | 5847 | 5687  | 5540   | 5360  |
| 172 | 6599 | 6362 | 6157  | 5920 | 5759  | 5610   | 5429  |
| 173 | 6678 | 6439 | 6232  | 5993 | 5831  | 5681   | 5499  |
| 174 | 6758 | 6517 | 6308  | 6067 | 5903  | 5752   | 5567  |
| 175 | 6838 | 6595 | 6385  | 6141 | 5976  | 5823   | 5637  |
| 176 | 6919 | 6673 | 6461  | 6216 | 6049  | 5895   | 5707  |
| 177 | 7000 | 6752 | 6538  | 6291 | 6123  | 5967   | 5778  |
| 178 | 7081 | 6832 | 6616  | 6366 | 6197  | 6040   | 5849  |
| 179 | 7163 | 6912 | 6694  | 6442 | 6271  | 6113   | 5921  |
| 180 | 7246 | 6992 | 6773  | 6519 | 6346  | 6187   | 5993  |
| 181 | 7329 | 7073 | 6852  | 6596 | 6422  | 6261   | 6065  |
| 182 | 7412 | 7155 | 6932  | 6673 | 6498  | 6336   | 6138  |
| 183 | 7496 | 7236 | 7012  | 6751 | 6574  | 6411   | 6212  |
| 184 | 7581 | 7319 | 7092  | 6829 | 6651  | 6486   | 6285  |
| 185 | 7666 | 7402 | 7173  | 6908 | 6728  | 6562   | 6360  |
| 186 | 7751 | 7485 | 7254  | 6987 | 6806  | 6639   | 6435  |
| 187 | 7837 | 7569 | 7336  | 7067 | 6884  | 6716   | 6510  |
| 188 | 7924 | 7653 | 7419  | 7147 | 6963  | 6793   | 6585  |
| 189 | 8010 | 7738 | 7502  | 7228 | 7042  | 6871   | 6662  |
| 190 | 8098 | 7823 | 7585  | 7309 | 7122  | 6949   | 6738  |
| 191 | 8186 | 7908 | 7669  | 7391 | 7202  | 7028   | 6815  |
| 192 | 8274 | 7995 | 7753  | 7473 | 7283  | 7107   | 6893  |
| 193 | 8363 | 8081 | 7838  | 7555 | 7364  | 7187   | 6971  |
| 194 | 8452 | 8168 | 7923  | 7638 | 7445  | 7267   | 7049  |
| 195 | 8542 | 8256 | 8008  | 7722 | 7527  | 7347   | 7128  |
| 196 | 8632 | 8344 | 8095  | 7806 | 7610  | 7428   | 7207  |
| 197 | 8723 | 8432 | 8181  | 7890 | 7692  | 7510   | 7287  |
| 198 | 8814 | 8521 | 8268  | 7975 | 7776  | 7592   | 7367  |
| 199 | 8905 | 8611 | 8356  | 8060 | 7859  | 7674   | 7448  |
| 200 | 8998 | 8701 | 8444  | 8146 | 7944  | 7757   | 7529  |