

Das Integral Problem

aus der BYTE 12 1986 (Seite 113-122)

Mirko Junge

21. Februar 2000

Im Folgenden wird ein einfach aussehendes uneigentliches Integral vorgestellt, dessen Lösung nicht ganz so einfach ist. Entnommen ist es der Byte 12/1986 Seite 113–122, wo es um numerische Approximation von Integralen ging.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

So harmlos dieses Integral auch aussehen mag, es hat es in sich!
Viel Spaß beim Lösen und kein Mogeln

Zuerst versucht man das uneigentliche Integral in eins mit endlichen Grenzen umzuformen:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

Mit Hilfe der Substitution $u = \frac{1}{x}$, $\frac{du}{dx} = -u^{-2}$ erhält man

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx + \int_1^0 \frac{-u^{-2}}{u^{-4} + u^{-2} + 1} du$$

Erweitern mit $\frac{u^4}{u^4}$ liefert

$$\int_0^1 \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx + \int_0^1 \frac{u^2}{u^4 + u^2 + 1} du = \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx$$

Der Quotient sieht so aus, als das man ihn mittels Partialbruchzerlegung vereinfachen könnte: Also sucht man die Nullstellen des Nenners:

$$x^4 + x^2 + 1 = u^2 + u + 1 = 0, \quad u = x^2$$

Die Formel für die quadratische Gleichung liefert:

$$u_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Hieraus folgt für x :

$$x_{1,2,3,4} = \pm \sqrt{-\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \pm \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Es existieren also zwei konjugiert komplexe Lösungen:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad x_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Es muß somit die folgende Gleichung gelöst werden:

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{P_1x + Q_1}{(x - x_1)(x - x_2)} + \frac{P_2x + Q_2}{(x - x_3)(x - x_4)}$$

Aus der obigen Nullstellenbestimmung weiß man:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x - x_1)(x - x_2) \cdot (x - x_3)(x - x_4)$$

Somit folgt

$$\frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{P_1x + Q_1}{(x - x_1)(x - x_2)} + \frac{P_2x + Q_2}{(x - x_3)(x - x_4)} \iff$$

$$x^2 + 1 = (P_1x + Q_1) \cdot (x - x_3)(x - x_4) + (P_2x + Q_2) \cdot (x - x_1)(x - x_2)$$

Durch Einsetzen der Werte für x_1, x_2, x_3 und x_4 erhält man

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 + x + 1, \quad (x - x_3)(x - x_4) = x^2 - x + 1$$

Somit ergibt sich für die Gleichung:

$$x^2 + 1 = (P_1x + Q_1) \cdot (x^2 - x + 1) + (P_2x + Q_2) \cdot (x^2 + x + 1)$$

Durch Ausmultiplizieren und Umsortieren erhält man:

$$x^2 + 1 = (P_1x^3 - P_1x^2 + P_1x + Q_1x^2 - Q_1x + Q_1) + (P_2x^3 + P_2x^2 + P_2x + Q_2x^2 - Q_2x + Q_2) \iff$$

$$x^2 + 1 = x^3(P_1 + P_2) + x^2(-P_1 + P_2 + Q_1 + Q_2) + x(P_1 + P_2 - Q_1 + Q_2) + (Q_1 + Q_2)$$

Diese Gleichung löst man mittels Koeffizientenvergleich und erhält ein inhomogenes Gleichungssystem der Form $\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$

$$P_1 + P_2 = 0, \quad P_1 + P_2 - Q_1 + Q_2 = 0, \quad Q_1 + Q_2 = 1, \quad Q_1 + Q_2 - P_1 + P_2 = 1$$

Vier Gleichungen mit vier Unbekannten. Die Lösung lautet also:

$$P_1 = 0, \quad P_2 = 0, \quad Q_1 = \frac{1}{2}, \quad Q_2 = \frac{1}{2}$$

Somit erhält man für das Integral:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx$$

Man weiß:

$$\int \frac{1}{a + bx + cx^2} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \tan^{-1} \left(\frac{2cx - b}{\sqrt{4ac - b^2}} \right); \quad 4ac - b^2 > 0$$

Also

$$\int \frac{1}{x^2 + x + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{4 - 1}} \tan^{-1} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{4 - 1}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right); \quad 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\int \frac{1}{x^2 - x + 1} dx = \frac{2}{\sqrt{4 - 1}} \tan^{-1} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{4 - 1}} \right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \tan^{-1} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right); \quad 4 - 1 = 3 > 0$$

Somit läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 + 1} dx &= \frac{1}{2} \left(\int_0^1 \frac{1}{x^2 + x + 1} dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2 - x + 1} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\tan^{-1} \left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 + \tan^{-1} \left(\frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\tan^{-1} \left(\frac{3}{\sqrt{3}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}} \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\tan^{-1}(\sqrt{3}) - \tan^{-1} \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} \right) \right) = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{3\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi \end{aligned}$$

Also

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^4 + x^2 + 1} dx = \frac{\sqrt{3}}{6} \pi$$