Capítulo 8

Tecnicas de diseño y compensación

El objetivo primordial de esta sección es presentar algunos procedimientos para el diseño y compensación de sistemas de control lineales, invariantes en el tiempo, con una entrada y una salida. Compensación es la modificación de la dinámica del sistema para satisfacer las especificaciones requeridas. Los procedimientos que se describen en esta sección para el diseño y compensación de sistemas de control, es la técnica del lugar de las ráices.

El método del lugar de las raíces es un procedimiento gráfico para determinar las ubicaciones de los polos y ceros de lazo cerrado, partiendo del conocimiento de las ubicaciones de los polos y ceros de lazo abierto al variar algún parámetro (usualmente la ganancia) de cero a infinito. Una ventaja del método del lugar de las raíces, consiste en que es posible obtener información sobre la respuesta transitoria, así como sobre la respuesta en frecuencia, partiendo de la configuración de los polos y ceros del sistema en el plano s.

8.1. Efectos de la adición de polos y ceros

El agregar un polo a la función de transferencia de lazo abierto tiene el efecto de mover el lugar de las raíces hacia la derecha, tendiendo a disminuir la estabilidad relativa y aumentar el tiempo de establecimiento de la respuesta. En las siguientes figuras se observa el lugar de las raíces para las siguientes funciones de trasnferencias $G_1(s) = \frac{1}{s}$, $G_2(s) = \frac{1}{s(s+1)}$, $G_3(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)}$

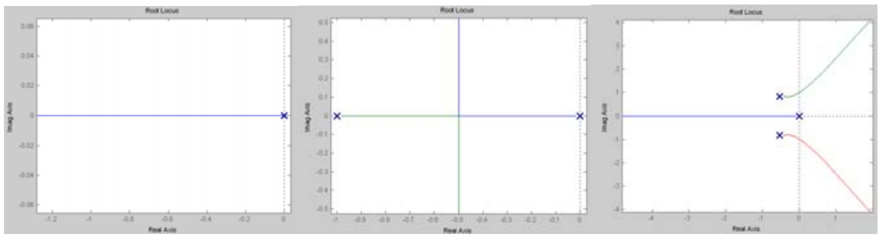


Figura 1. Efectos de añadir polos a la función de transferencia

El agregar un cero a la función de transferencia de lazo abierto tiene el efecto de mover el lugar de las raíces hacia la izquierda, tendiendo a hacer el sistema más estable y a disminuir el tiempo de establecimiento de la respuesta. Físicamente, agregar un cero a la función de transferencia directa significa añadir control derivativo al sistema. El efecto de este control es introducir cierto grado de anticipación al sistema y acelerar la respuesta transitoria

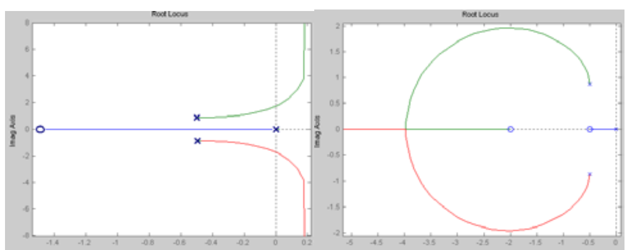


Figura 2. Efectos de añadir ceros a la función de transferencia

8.2. Diseño usando el método del lugar de las raíces

Considere un problema de diseño en el que el sistema original es o bien inestable para todos los valores de la ganancia, o es estable, pero tiene características indeseables de respuesta transitoria. En tal caso, se necesita modificar el lugar de las raíces, para que los polos dominantes de lazo cerrado estén en las ubicaciones deseadas en el plano complejo. Este problema se puede resolver insertando un compensador adecuado, en cascada con la función de transferencia tal y como se meustra en la siguiente figura

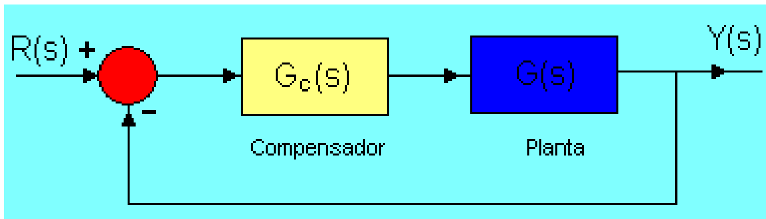


Fig. 3 Sistema de Control en cascada

El proceso para diseñar un compensador utilizando la técnica del lugar de las raíces lo podemos enumerar como sigue:

1. Elija una configuración y un compensador con un parámetro abierto k como el que se muestra en la figura 3

2. Determine el polo dominante que cumpla con las condiciones de diseño.

3. Determine la función de transferencia de lazo abierto y entonces determine el rango de k para que el sistema sea estable y cumpla las especificaciones de estado estable.

4. Trace el lugar de las raíces de la función de transferencia de lazo abierto y determine si existe un rango de k para que el sistema cumpla las especificaciones de diseño. Si no existe la ganancia k, regrese al paso 1 y considere un compensador más complejo

5. Asegurese que se satisface la condición de angulo

6. Ajuste la ganancia con la condición de magnitud

Example 66 *Considere la siguiente planta*

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \tag{8.1}$$

Se desea diseñar un controlador de tal forma que el sistema en lazo cerrado cumpla con las siguiente condiciones (ante una señal escalón unitario):

1. *Tiempo de establecimiento* $t_s = 4seg$

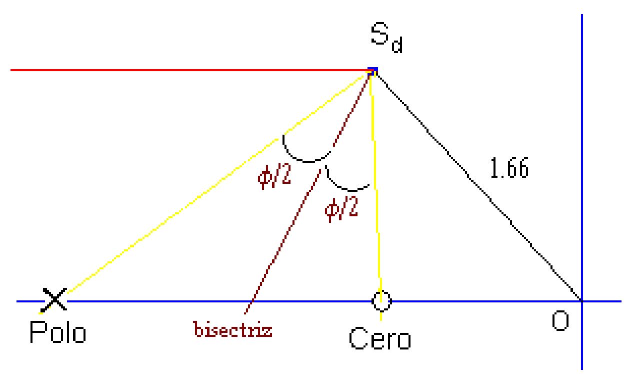
2. *Máximo sobreimpulso* $M_p = 10\,\%$.

Solution 67 1. *El primer paso es trazar el lugar de las raíces del sistema y verificar si con un controlador proporcional se cumplen las condiciones de diseño*

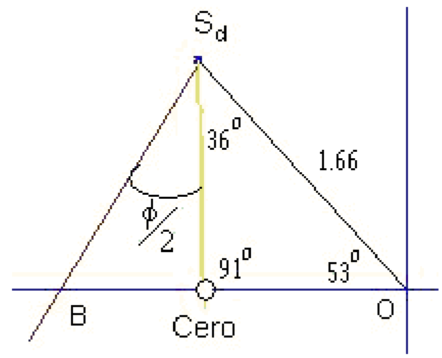
2. *Si no se cumplen las condiciones de diseño se propone un controlador más complejo que un proporcional. En este caso se propone un compensador en adelanto*
$$G(s) = k\frac{s+\alpha}{s+\beta}$$
donde α y β se determinan a partir de la condición de ángulo

3. *De las condiciones de diseño se obtiene la ubicación del polo que cumple con las restricciones, le denominaremos polo deseado s_d*
$$t_s = 4\tau = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4 \rightarrow \xi\omega_n = 1$$
$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0{,}1 \rightarrow \xi = 0{,}6$$
$$s_d = -1 \pm j1{,}33$$

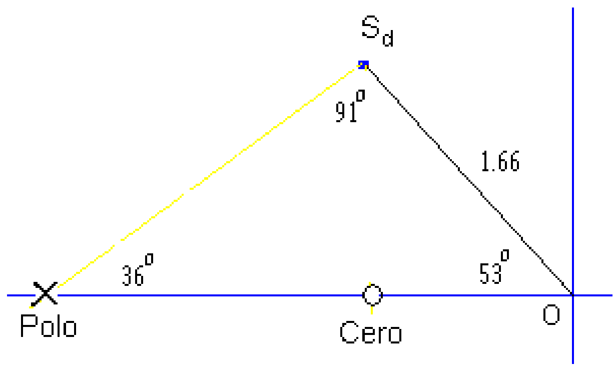
4. *Para que el punto s_d sea polo de lazo cerrado, primero se debe satisfacer la condición de ángulo*
$$\measuredangle kG_c(s)G(s) = \pm 180^0$$
$$\measuredangle G_c(s)G(s)|_{s_d} = \measuredangle G_c(s)|_{s_d} + \measuredangle G(s)|_{s_d} = \Phi + \measuredangle \frac{2}{s(s+1)(s+5)}\Big|_{s_d}$$
$$\Phi + \measuredangle(-0{,}1220 + 0{,}1763i) = \pm 180^o$$
$$\Phi + 124{,}7^o = \pm 180^o \rightarrow \Phi = 55{,}3^o$$
A continuación se muestra una metodología para determinar la ubicación del polo y el cero del compensador



La ubicación del cero se obtiene utilizando la ley de los senos
$$\frac{sen(91^o)}{1{,}66} = \frac{sen(36^o)}{cero} \rightarrow cero = 0{,}976$$



La ubicación del polo es



$$\frac{sen(36^o)}{1{,}66} = \frac{sen(91^o)}{polo} \rightarrow polo = 2{,}82$$

La función de transferencia del controlador es entonces

$$G_c(s) = k\frac{s+0{,}976}{s+2{,}82}$$

Esta función de trasnferencia garantiza que se satisface la condición de ángulo, es decir el polo deseado $s_d = -1 + j1{,}33$ se encuentra sobre el nuevo lugar de las raíces. Para obtener el valor de la ganancia k se utiliza la condición de magnitud

$$\begin{aligned} \left| k\frac{s+0{,}976}{s+2{,}82}\frac{2}{s(s+1)(s+5)} \right|_{s_d=-1+j1{,}33} &= 1 \\ k &= 8{,}33 \end{aligned}$$

Example 68 *Considere la siguiente planta*

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)}$$

se desea diseñar un sistema de control en lazo cerrado que garantice que el error en estado estable ante un escalón unitario sea cero. Para lograr este objetivo se proponen los siguientes controladores:

1. *Control proporcional* $G(s) = K_p$
2. *Control Proporcional Integral PI* $G(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$
3. *Control proporcional derivativo PD* $G(s) = K_p + K_d s$
   Analice cada uno de los controladores propuestos utilizando el lugar de las raíces y proporcione el rango de las ganancias para cumplir el objetivo de control. Justifique su respuesta.

Capítulo 9

Controladores PID

A pesar de la rápida evolución que han tenido los sistemas de control en estos últimos años, el controlador PID permanece como el caballo de batalla en los procesos industriales. El término básico en el controlador PID es proporcional P que origina una actuación de control correctiva proporcional al error. El término integral I brinda una corrección proporcional a la integral del error. Esta acción tiene la ventaja de asegurar que se aplicará suficicnete acción de control para reducir el error de regulación a cero. Sin embargo, la acción integral también tiene un efecto desestabilizador debido al corrimiento de fase agregado. El término derivativo D da propiedades predictivas a la actuación generando una acción de control prooporcional a la velocidad del cambio del error. Tiende a dar más estabilidad al sistema pero suele generar grandes valores en la señal de control

La función de transferencia del PID es dado por

$$k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = k_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right)$$

donde k_p es la ganancia proporcional, k_i es la ganancia integral, k_d es la ganancia derivativa, T_i se denonima constante de tiempo integral y T_d es la constante de tiempo derivativo.

Existen varios esquemas de control PID. El arreglo mostrado en la figura (a) es el más discutido en muchos ibros de control; este arreglo no es deseable si la señal de referencia contiene discontinuidades, como por ejemplo, señales de tipo escalón. En este caso, la señal de error $e(t)$ tendrá discontinuidades y el término derivativo generará impulso o señales de actuación muy grandes. Un esquema alterno es mostrado en la figura (b) denominado *controlador con derivador a la salida*, donde únicamente la salida de la planta es derivada. En este arreglo, la discontinuidad de la señal de referencia se verá reflejada en la señal de actuación a través de la ganancia proporcional paro no será amplificada por el derivador. Otro arreglo es mostrado en la figura (c), donde el error $e(t)$ es integrado. Este esquema es denominado *controlador con parte integral en el* *set-point*. En este caso, la discontinuidad de la señal de referencia será suave devido al efecto integral.

9.1. Reglas de sintonización de Ziegler-Nichols

La sintonización de un controlador es el proceso de seleccionar los parámetros del controlador para que se cumplan las especificaciones de operación. Si se puede deducir un modelo matemático de la planta, entonces es posible aplicar varias técnicas para determinar los parámetros del controlador que cumplen con las específicaciones de estado estacionario y transitorio del sistema en lazo cerrado.

Sin embargo, algunos métodos especiales han sido desarrollados para sintonizar experimentalmente los parámetros del PID. Existen dos reglas clásicas heurísticas debido a Ziegler-Nichols que pueden ser usadas para determinar los parámetros del controlador. Si la planta es tal que se puede aplicar las reglas de Ziegler-Nichols entonces la planta con un controlador PID sintonizado por las reglas de Z-N presentará un sobreimpulso de aproximadamente del $20-30\,\%$ de la respuesta al escalón.

Las reglas de sintonización dan una primera estimación (aproximación) de los parámetros y brindan un punto de partida para el ajuste fino.

9.1.1. 1ra. Regla de Ziegler-Nichols

Los parámetros del PID se determinan a partir de la respuesta experimental del sistema en lazo abierto al aplicar una entrada escalón. Este método se aplica a sistemas estables que presenten una respuesta monótona al escalón excepto para una característica de fase no mínima inicial; esto es, si la planta no incluye integradores o polos dominantes complejos conjugados la respuesta al escalón puede tener un aspecto de una curva en forma de *S,* entonces la respuesta es aproximada por líneas rectas, con K, d y T como se muestra en la figura. Si la respuesta no tiene la forma de S, el método no es aplicable.

Metodología para obtener los parámetros del controlador PID

1. Someter la entrada a un cambio tipo escalón y graficar la respuesta del sistema

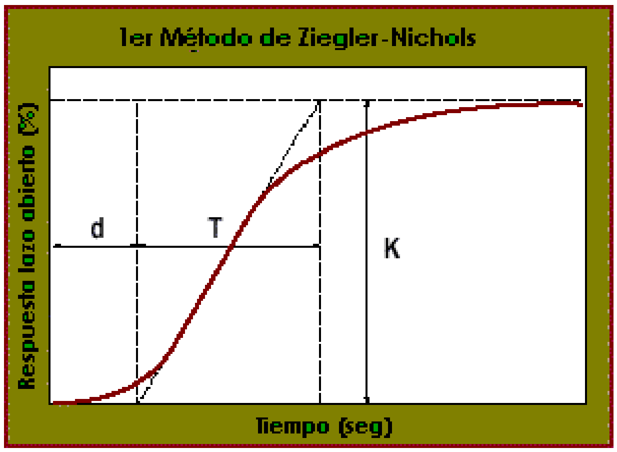
2. Localizar el punto donde la pendiente de la respuesta al escalón tiene su máximo, i.e., se localiza el punto de inflexión (donde la velocidad de cambio de la salida es máxima)

3. Trazar una línea tangente a la curva en el punto de inflexión

4. Medir la intersección de esta recta tangente con el eje del tiempo y con el eje de estabilización. Con esto se obtiene la constante de tiempo τ y el retardo d

5. Los parámetros del controlador PID se seleccionan de acuerdo a la siguiente tabla

	K_p	T_i	T_d
P	τd		
PI	$0{,}9\tau d$	$0{,}3d$	
PID	$1{,}2\tau d$	$2d$	$0{,}5d$



Example 69 *Sea* $G(s) = \frac{1}{(s+4)(s+5)}$ *y considere una señal de entrada* $U(s) = \frac{0{,}5}{s}$ *determine los parámetros de un controlador* PI *de acuerdo a la primera regla de Z-N*

Solution 70 *Se obtiene la respuesta del sistema ante la entrada* $U(s)$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{0{,}5}{s(s+4)(s+5)} = \frac{1}{40}\frac{1}{s} - \frac{1}{8}\frac{1}{s+4} + \frac{1}{10}\frac{1}{s+5} \\ y(t) &= \frac{1}{40} + \frac{e^{-5t}}{10} - \frac{e^{-4t}}{8} \\ \acute{y}(t) &= -\frac{e^{-5t}}{2} + \frac{e^{-4t}}{2}, \qquad \acute{y}(t) = 2{,}5e^{-5t} - 2e^{-4t} \end{aligned}$$

para obtener el punto de inflexión, se considera la segunda derivada y se igual a cero

$$\acute{y}(t) = 0 \rightarrow e^{-t} = 0{,}8 \rightarrow t = 0{,}22$$

La pendiente en el instante de inflexión es

$$\acute{y}(0{,}22) = -\frac{e^{-5(0{,}22)}}{2} + \frac{e^{-4(0{,}22)}}{2} = 0{,}04$$

por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$l(t) = y(0{,}22) + 0{,}04\,(t - 0{,}22)$$

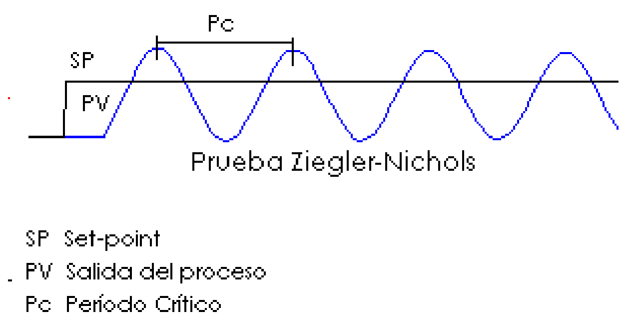
donde $y(0{,}22) = 0{,}0065$.
A continuación, se calcula el punto o el instante en el cual la recta tangente se intersecta con el eje del tiempo y con el eje de estabilización

$$\begin{aligned} l(t) &= 0{,}0065 + 0{,}04\,(t - 0{,}22) = 0 \\ l(t) &= 0{,}0065 + 0{,}04\,(t - 0{,}22) = k \end{aligned}$$

¿Cómo se obtiene el valor de k*?*

9.1.2. 2da. Regla de Ziegler-Nichols

Este método es válido sólo para plantas en lazo cerrado que presenta oscilaciones sostenidas para un valor dado de la ganancia proporcional, la cuál puede ser positiva o negativa.



El procedimiento es el siguiente:

1. Aplicar a la planta sólo control proporcional con ganancia K_p pequeña.
2. Ajustar la ganancia proporcional K_p hasta que la salida del sistema en lazo cerrado empiece a oscilar (estabilidad marginal). La ganacia con la que se logra hacer oscilar al sistema se denomina ganancian crítica K_c
3. Registrar la ganancia crítica $K_p = K_c$ y el período de las oscilaciones resultantes P_c
4. Determinar los parámetros del controlador PID de acuerdo a la siguiente tabla

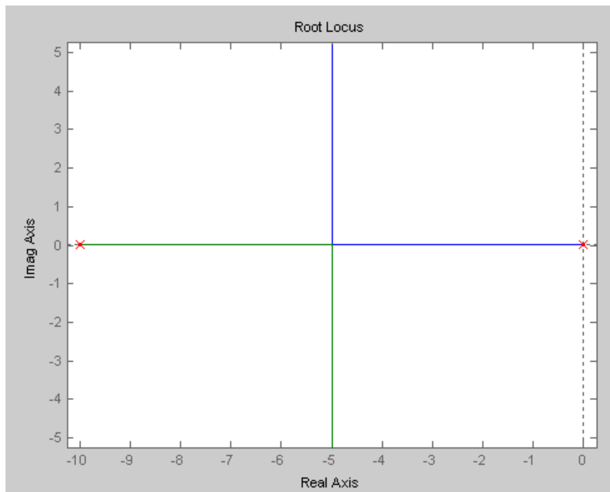
	K_p	T_i	T_d
P	$0{,}5K_c$		
PI	$0{,}45K_c$	$\frac{P_c}{1{,}2}$	
PID	$0{,}6K_c$	$\frac{P_c}{2}$	$\frac{P_c}{8}$

Tabla 2. Método de lazo cerrado

Example 71 *¿Es posible determinar el valor de la gananacia crítica K_c para hacer oscilar un sistema representado por la siguiente funcion de transferencia?*

$$G(s) = \frac{10}{s(s+10)}$$

Solution 72 *El lugar de las raíces del sistema es representado en la siguiente figura*



Note que no existe ganancia con la cuál el lugar de las raíces cruce el eje imaginario, por lo que no existirá ganancia que haga oscilar a nuestro sistema. La conclusión es que el sistema osiclará si y solo si el lugar de las raíces cruza el eje imaginario.

Example 73 *Utilizar el 2do. método de Z-N para encontrar las ganancias para el control PID para una planta que tiene la siguiente función de transferencia (función de transferencia utilizada en el ejemplo 66)*

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)}$$

Solution 74 *Con el controlador proporcional, el polinomio característico en lazo cerrado es:*

$$s^3 + 6s^2 + 5s + 2k_p = 0$$

Utilizando el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

$$\begin{array}{ccc} s^3 & 1 & 5 \\ s^2 & 6 & 2k_p \\ s & \frac{30-2k_p}{6} & \\ s^0 & 2k_p & \end{array}$$

El rango de estabilidad es $0 < k < 15$. ¿Qué sucede con el sistema si la ganancia proporcional $k_p = K_c$ es 15? El sistema es críticamente estable (marginalmente *estable) y los polos de lazo cerrado dominantes se ubican sobre el eje imaginario. Utilizando el polinomio auxiliar*

$$6s^2 + 30 = 0$$

se tiene que los polos se ubican en $s = \pm j2{,}23$. *El período de oscilación es* $P_c = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2{,}23} = 2{,}81$. *Con estos dos datos* $K_c = 15$ *y* $P_c = 2{,}81$ *y utilizando la tabla 2, se obtienen los parámetros del controlador*

$$k_p = 0{,}6K_c = 9$$
$$T_i = \tfrac{P_c}{2} = 1{,}405 \rightarrow k_i = \tfrac{k_p}{T_i} = 6{,}4$$
$$T_d = \tfrac{P_c}{8} = 0{,}35 \rightarrow K_d = k_p T_d = 3{,}16$$

9.2. Método análítico utilizando el lugar de las raíces

Considere la función de transferencia del ejemplo 66, es decir

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \tag{9.1}$$

Se desea diseñar un controlador PID de tal forma que el sistema en lazo cerrado cumpla con las siguiente condiciones (ante una señal escalón unitario):

1. Tiempo de establecimiento $t_s = 4seg$
2. Máximo sobreimpulso $M_p = 10\,\%$.

De las condiciones de diseño se obtiene la ubicación del polo deseado

$$t_s = 4\tau = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4 \rightarrow \xi\omega_n = 1$$

$$M_p = e^{\frac{-\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0{,}1 \rightarrow \xi = 0{,}6$$
$$s_d = -1 \pm j1{,}33$$

y para que el punto s_d sea polo de lazo cerrado, primero se debe satisfacer la condición de ángulo

$$\measuredangle kG_c(s)G(s) = \pm 180^0$$

$$\measuredangle G_c(s)G(s)\big|_{s_d} = \measuredangle G_c(s)\big|_{s_d} + \measuredangle G(s)\big|_{s_d} = \Phi + \measuredangle \tfrac{2}{s(s+1)(s+5)}\Big|_{s_d}$$
$$\Phi + \measuredangle\,(-0{,}1220 + 0{,}1763i) = \pm 180^o$$
$$\Phi + 124{,}7^o = \pm 180^o \rightarrow \Phi = 55{,}3^o$$

El controlador propuesto es un PID

$$\begin{aligned} G_c(s) &= k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_p s + k_i + k_d s^2}{s} \\ &= k\frac{s^2 + \alpha s + \beta}{s} \end{aligned}$$

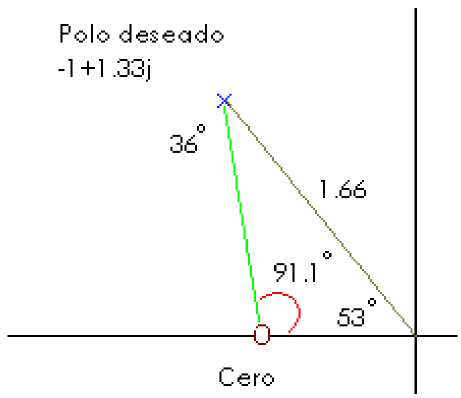
donde $k = k_d$, $\alpha = \frac{k_p}{k_d}$ y $\beta = \frac{k_i}{k_d}$. La condición de ángulo implica que

$$\measuredangle G_c(s) = \measuredangle \left(s^2 + \alpha s + \beta\right)\Big|_{s_d=-1+j1,33} - \measuredangle s|_{s_d=-1+j1,33} = 55{,}3^o$$

Al realizar la evaluación del polo en el origen se tiene

$$\begin{aligned} \measuredangle \left(s^2 + \alpha s + \beta\right)\Big|_{s_d=-1+j1,33} - 126{,}93^o &= 55{,}3^o \\ \measuredangle \left(s^2 + \alpha s + \beta\right)\Big|_{s_d=-1+j1,33} &= 182{,}23^o \end{aligned}$$

La ubicación de los ceros debe ser de tal forma que los ángulos con respecto al polo deseado sea de $182{,}23^o$. En la solución propuesta simplificaremos el problema ubicando los dos ceros en la misma posición, y garantizaremos que nos entreguen un ángulo de $91{,}1^o$



Utilizando la ley de los senos

$$\begin{aligned} \frac{sen36^o}{?_c} &= \frac{sen91{,}1^o}{1{,}66} \\ ?_c &= 0{,}97 \end{aligned}$$

Por lo que el polinomio numerador es

$$(s + 0{,}97)^2 = s^2 + 1{,}94s + 0{,}94$$

de donde

$$\alpha = \frac{k_p}{k_d} = 1{,}94, \qquad \beta = \frac{k_i}{k_d} = 0{,}94$$

A partir de la condición de magnitud se obtiene el valor de la ganancia k_d

$$\left| k\frac{s^2 + 1{,}94s + 0{,}94}{s} \frac{2}{s(s+1)(s+5)} \right|_{s_d=-1+1,33j} = 1$$

$$k = k_d = 4{,}54$$

Finalmente el controlador PID toma la forma

$$G_c(s) = 8{,}8 + \frac{4{,}26}{s} + 4{,}54s$$