Ingeniería de Control

Virgilio Vásquez López

16 de junio del 2003

Resumen

.

Índice general

Capítulo 1

Transformada de Laplace

En esta sección, se realizará un breve repaso de la transformada de Laplace y se discutirá su aplicación en la solución de ecuaciones diferenciales invariantes en el tiempo.

Considere una función $f(t)$ definida para toda $t \geq 0$. La transformada de Laplace de $f(t)$ denotado por $F(s)$, se define como

$$F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\} = \int_{0_-}^{\infty} e^{-st} f(t) dt \tag{1.1}$$

donde s es una variable compleja, llamada también variable de la transformada de Laplace. El límite inferior de la integral 0_- significa que el límite se aproxima a cero desde un valor negativo[1].

Exercise 1 *Determine la transformada de Laplace de la función escalón unitario $u(t)$, definida como*

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Exercise 2 *Determine la transformada de Laplace de la función $u(t-\alpha)$*

$$u(t-\alpha) = \begin{cases} 1 & t \geq \alpha \\ 0 & t < \alpha \end{cases}$$

Exercise 3 *Determine la transformada de Laplace de la función $f(t) = t$*

1.1. Teoremas de la Transformada de Laplace

No es conveniente usar la definición (1.1) cada vez que deseamos determinar la transformada de Laplace de una función $f(t)$, por ejemplo, el calculo de

[1] Se considera que el problema de existencia y unicidad se satisfacen para todas las funciones a utilizar en este curso, es decir, que todas las funciones tiene transformada de Laplace

$\pounds\{e^t t\sin(t)\}$ es, sin exagerar, extremadamente laboriosa. En la siguiente discusión presentamos varios teoremas que permiten ahorrar el trabajo de obtener la transformada de Laplace de una función.

Propiedad de la linealidad

La transformada de laplace es lineal

$$\pounds\left\{\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)\right\} = \alpha_1 \pounds\left\{f_1(t)\right\} + \alpha_2 \pounds\left\{f_2(t)\right\}$$

donde α_1 y α_2 son constantes

Traslación compleja

Si α es un número real cualquiera, entonces

$$\pounds\left\{e^{-\alpha t} f(t)\right\} = F\left\{s + \alpha\right\}$$

donde $\pounds\left\{f(t)\right\} = F\left\{s\right\}$. Este teorema también es conocido como primer teorema de la traslación

Exercise 4 *Determine la transformada de Laplace de la función en el tiempo* $g(t) = e^{-2t}(t+3)$

Exercise 5 *Determine la trasnformada de Laplace de la función* $g(t) = e^{-\alpha t} sen(\omega t)$ *y* $g(t) = e^{-\alpha t}\cos(\omega t)$

Derivada de una transformada

Para $n = 1, 2, 3, ..$

$$\pounds\left\{t^n f(t)\right\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

donde $F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\}$. Por ejemplo, para $n = 1$, se tiene

$$\pounds\left\{t f(t)\right\} = (-1)\frac{d}{ds} F(s)$$

Exercise 6 *Determine la transformada de Laplace de la función* $f(t) = te^{-t}$*, utilizando*

1. *Teorema de la traslación compleja*
2. *Multiplicación por t*

Exercise 7 *Obtenga la transfromada de Laplace de* $g_1(t) = t^2$; $g_2(t) = tsen(t)$; $g_3(t) = t^2 sen(t)$

Exercise 8 *Obtenga la transformada de Laplace de* $g(t) = te^{-t}\cos(t)$

Segundo teorema de traslación

Si $\alpha > 0$, entonces

$$\pounds\left\{f(t-\alpha)u(t-\alpha)\right\} = e^{-\alpha s}F\left\{s\right\}$$

donde $F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\}$

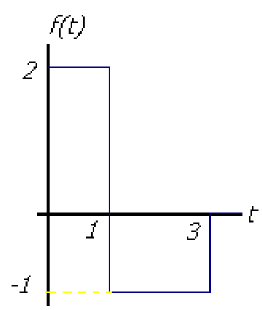
Example 9 *Para comprender este teorema, obtenga las gráficas de estas funciones:*

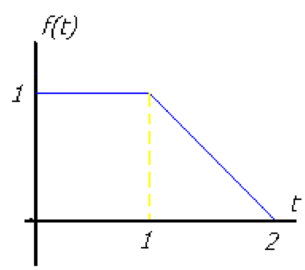
1. $f(t) = t$
2. $f(t-1)$
3. $f(t)u(t-1)$
4. $f(t-1)u(t-1)$

Exercise 10 *Determine la transformada de Laplace de los incisos anteriores ¿Son iguales?*

Exercise 11 *Determine la Transformada de Laplace de* $u(t-2)$

Exercise 12 *Determine la transformada de Laplace de las siguientes funciones*





1.2. Transformada Inversa de Laplace

El proceso matemático de pasar de la expresión en variable compleja a la expresión en función del tiempo se denomina *Transformacion Inversa*. Como notación para la transformación inversa se utiliza$\pounds^{-1}$, de modo que

$$\pounds^{-1}\left\{F(s)\right\} = f(t)$$

Existen diversos métodos para determinar la transformada inversa de Laplace, por ejemplo, utilizar una tabla de transformada de Laplace. En este caso, la transformada de Laplace debe aparecer en forma inmediatamente reconocible. Frecuentemente la función buscada puede no aparecer en las tablas de las que se disponen, en este caso se puede simplificar utlizando la técnica de fracciones parciales y escribir $F(s)$ en términos de funciones simples de s, para los cuáles las transformadas inversas sean facilmente identificables

1.3. Método de Fracciones Parciales

En problemas de teoría del control, la transformada de Laplace de la función $f(t)$, frecuentemente es de la forma

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios en s y el deg $N(s) <$ deg $D(s)$[2]. Si $F(s)$ se descompone en sus componentes

$$F(s) = F_1(s) + F_2(s) + ... + F_n(s)$$

sus transformadas inversa de Laplace pueden ser obtenidas más fácilmente

$$\begin{aligned} \pounds^{-1}\{F(s)\} &= \pounds^{-1}\{F_1(s)\} + \pounds^{-1}\{F_2(s)\} + ... + \pounds^{-1}\{F_n(s)\} \\ &= f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t) \end{aligned}$$

Raíces reales y diferentes

Sea $F(s)$ escrita en su forma factorizada

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)(s+p_2)...(s+p_n)}$$

donde p_1, p_2,...,p_n son cantidades reales o complejas, pero para cada complejo p debe aparecer su respectivo conjugado. Si $p_1 \neq p_2 \neq ... \neq p_n$, es decir $F(s)$ contiene raíces distintas, puede expandirse como:

$$F(s) = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + ... + \frac{a_n}{s+p_n}$$

donde las a_i son constantes y se denominan residuos de la raíz $s = -p_i$. La fórmula para obtener el residuo es

$$a_i = \left[(s+p_i)\frac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=-p_i}$$

Exercise 13 *Determine la transformada inversa de Laplace de*

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

Raíces Repetidas

Sea $F(s)$ escrita en forma factorizada

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N(s)}{(s+p_1)^r(s+p_{r+1}) + ... + (s+p_n)}$$

[2] deg (degree) grado del polinomio

es decir, existen r raíces múltiples y $n-r$ raíces diferentes. la expansión de $F(s)$ en fracciones parciales es

$$F(s)=\frac{b_r}{(s+p_1)^r}+\frac{b_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}}+...+\frac{b_1}{s+p_1}+\frac{a_{r+1}}{s+p_{r+1}}+\frac{a_n}{s+p_n}$$

donde b_r, b_{r-1}, b_1 están dados por

$$\begin{aligned} b_r &= \left[(s+p_1)^r \tfrac{N(s)}{D(s)}\right]_{s=-p_1} \\ b_{r-1} &= \left\{\tfrac{d}{ds}\left[(s+p_1)^r \tfrac{N(s)}{D(s)}\right]\right\}_{s=-p_1} \\ &\vdots \\ b_{r-1} &= \left\{\tfrac{d}{ds}\left[(s+p_1)^r \tfrac{N(s)}{D(s)}\right]\right\}_{s=-p_1} \\ &\vdots \\ b_{r-1} &= \left\{\tfrac{d}{ds}\left[(s+p_1)^r \tfrac{N(s)}{D(s)}\right]\right\}_{s=-p_1} \end{aligned}$$

Exercise 14 *Determine la transformada inversa de Laplace de la siguiente función*

$$F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)(s+2)}$$

Exercise 15 *Determine la transformada inversa de Laplace de la siguiente función*

$$F(s)=\frac{s^2+2s+3}{(s+1)^3}$$

Raíces complejas y conjugadas

Si la función $F(s)$ incluye un par de raíces complejas y conjugadas, es conveniente no expandir $F(s)$ en las fracciones parciales usuales, sino en una suma de una función seno y una función coseno amortiguadas

Exercise 16 *Determine la transformada inversa de Laplace de la siguiente función*

$$F(s)=\frac{s+6}{s^2+2s+2}$$

Caso General

Este se elustrará con un ejemplo:

Exercise 17 *Determine la transformada inversa de Laplace de la siguiente función*

$$F(s)=\frac{1}{s\,(s^2+2s+2)}$$

1.4. Solución de ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo

En esta sección estamos interesados en el uso del método de la transformada de Laplace para solucionar ecuaciones diferenciales lineales e invariantes en el tiempo (EDLIT). Este método lleva a la solución completa (solución homogénes y solución particular) de EDLIT. Los métodos clásicos para encontrar la solución completa de una ecuación diferencial requieren la evaluación de las constantes de integración a partir de las condiciones iniciales. En el caso del método de la transformada de Laplace, este requisito es innecesario debido a que las condiciones iniciales se incluyen automáticamente en la Transformada de Laplace de la ec. diferencial

Remark 18 *Si todas las condiciones iniciales son cero, entonces la transformada de Laplace de la ec. diferencial se obtiene simplemente reemplazando* $\frac{d}{dt}$ *por* s*,* $\frac{d^2}{dt^2}$ *por* s^2 *y así sucesivamente.*

Teorema de la diferenciación en el tiempo

Sea $F(s) = \pounds\left\{f(t)\right\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\pounds\left\{\tfrac{d}{dt}f(t)\right\} &= sF(s) - f(0) \\
\pounds\left\{\tfrac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} &= s^2F(s) - sf(0) - f^{(1)}(0) \\
&\vdots \\
\pounds\left\{\tfrac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} &= s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f^{(1)}(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)
\end{aligned}$$

donde $f^{(i)}(0)$ denota la $i - th$ derivada de $f(t)$ en $t = 0$

La respuesta de un sistema lineal e invariante en el tiempo se descompone en:

1. Respuesta a entrada cero
2. Respuesta a edo. cero

Example 19 *Solucione la ec. diferencial*

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 3\frac{du(t)}{dt} - u(t) \tag{1.2}$$

Solution 20

$$Y(s) = \frac{(s+3)y(0) + \dot{y}(0) - 3u(0)}{s^2+3s+2} + \frac{3s-1}{s^2+3s+2}U(s) \tag{1.3}$$

Esta ecuación revela que la solución de (1.2) es parcialemente excitada por la entrada $u(t)$, $t \geq 0$, y parcialemente excitada por las condiciones iniciales $y(0)$, $\dot{y}(0)$ y $u(0)$. Estas condiciones iniciales son llamados el *estado inicial*. El estado inicial es excitado por una entrada aplicada antes de $t = 0$, la forma en que la ecuación diferencial adquiere el estado inicial, es inmaterial para el estudio de la ecuación diferencial.

Respuesta a entrada cero. Polinomio característico

Considere la cuación (1.2). Si $u(t) = 0$ para $t \geq 0$, entonces (1.2) se reduce a

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 0 \tag{1.4}$$

la cual es llamada la ecuación homogénea. la solución de la ecuación diferencial (1.4) es

$$y(t) = k_1e^{-t} + k_2e^{-2t}$$

No importa como sean las condiciones iniciales, la respuesta a entrada cero es una combinación de las dos funciones e^{-t}, e^{-2t}. Las dos funciones son la transformada inversa de $\frac{1}{s+1}$ y $\frac{1}{s+2}$. Las dos raíces -1 y -2 son llamados modos del sistema. Los modos gobiernan la forma de la respuesta a entrada cero del sistema

Caso general Considere una ecuación diferencial de orden n

$$\begin{array}{c} a_ny^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + ... + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = \\ b_my^{(m)}(t) + b_{m-1}u^{(m-1)}(t) + ... + b_1u^{(1)}(t) + b_0u(t) \end{array} \tag{1.5}$$

donde $y^{(i)}(t) = \frac{d^i y(t)}{dt^{(i)}}$, $u^{(i)}(t) = \frac{d^i \, \mathrm{y}t)}{dt^{(i)}}$. Se define el operador diferencial $p = \frac{d}{dt}$, es decir $py(t) = \frac{dy}{dt}$, $p^2y(t) = \frac{d^2y}{dt^2}$, ...Utilizando esta notación, la ecuación (1.5) puede escribirse como

$$D(p)y(t) = N(p)u(t) \tag{1.6}$$

donde

$$\begin{array}{c} D(p) = a_np^{(n)} + a_{n-1}p^{(n-1)} + ... + a_1p^{(1)} + a_0p \\ N(p) = b_mp^{(m)} + b_{m-1}p^{(m-1)} + ... + b_1p^{(1)} + b_0p \end{array} \tag{1.7}$$

En el estudio de la respuesta a entrada cero, se asume que $u(t) = 0$. Entonces (1.6) se reduce a

$$D(p)y(t) = 0 \tag{1.8}$$

Esta es llamada la ecuación homógenea, su solución es exclusivamente excitada por las condiciones iniciales. Al aplicar la transformada de Laplace a (1.8) se obtiene

$$Y(s) = \frac{I(s)}{D(s)}$$

donde $D(s)$ es definido en (1.7) con p reemplazado por s e $I(s)$ es un polinomio en st que depende de las condiciones iniciales. Al polinomio $D(s)$ le denominamos *polinomio característico*, debido a que gobierna la respuesta libre, natural o no forzada del sistema. Las raíces del polinomio $D(s)$ son llamados los *modos* del sistema

Respuesta a estado cero. Función de transferencia

Considere nuevamente la ecuación (1.2), es decir

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 3\frac{du(t)}{dt} - u(t) \tag{1.9}$$

sabemos que la respuesta de este sistema es parcialmente excitada por las condiciones iniciales y parcialemente excitada por la señal de entrada. Si todas las condiciones iniciales son iguales a cero, la respuesta es excitada exclusivamente por la entrada y es llamada respuesta a estado cero. En el dominio complejo, la respuesta de (1.9) es gobernada por

$$Y(s) = \frac{3s-1}{s^2+3s+2}U(s) := G(s)U(s)$$

donde $G(s) = \frac{3s-1}{s^2+3s+2}$ es denominada *función de transferencia*. La función de transferencia se define como la relación entre la transformada de laplace de la salida con respecto a la transfrormada de Laplace de la entrada, considerando las condiciones iniciales igual a cero

$$G(s) = \left.\frac{Y(s)}{U(s)}\right|_{c.i.=0} = \left.\frac{\pounds\{salida\}}{\pounds\{entrada\}}\right|_{c.i.=0}$$

La función de transferencia describe únicamente *la respuesta a estado cero.*

1.4.1. Clasificación de la función de transferencia

Considere la función

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

donde $N(S)$ y $D(s)$ son dos polinomios con coeficientes reales. Sí

$$\deg\ N(s) > \deg\ D(s)$$

$G(s)$ es llamada función de transferencia impropia.

Si

$$\deg\ N(s) \leq \deg\ D(s)$$

$G(s)$ es llamada función de transferencia propia. Es estrictamente propia si $\deg\ N(s) < \deg\ D(s)$, bipropia si $\deg\ N(s) = \deg\ D(s)$. Las funciones de transferencia propias, incluyen las estrictamente propias y las bipropias.

Example 21 *Clasifique las siguientes funciones de trasnferencia*

$$2 \quad \frac{1}{s+1} \quad s \quad \frac{s^2-1}{s+2} \quad \frac{s-1}{s+1}$$

POLOS y CEROS

Considere la función de transferencia

$$G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$$

donde $N(s)$ y y $D(s)$ son dos polinomios con coeficientes reales y $\deg N(s) \leq \deg D(s)$.

Definition 22 *Un número complejo o real λ es un polos de $G(s)$ si $|G(\lambda)|=\infty$, donde $|\cdot|$ denota valor absoluto. Es un cero de $G(s)$ si $G(\lambda)=0$.*

Example 23 *Considere la siguiente función de trasnferencia*

$$G(s)=\frac{2\left(s^2+4s+3\right)}{(s-1)(s+1)(s+2)}$$

Se tiene que

$$G(-2)=\frac{2\left((-2)^2+4(-2)+3\right)}{((-2)-1)((-2)+1)((-2)+2)}=\frac{-2}{0}=\infty$$

Por lo tanto -2 es un polo de $G(s)$. Claramente -2 es una raíz de $D(s)$. ¿Toda raíz de $D(s)$ es un pol de $G(s)$? Para contestar esta pregunta determine $G(-1)$

$$G(-1)=\frac{0}{0}$$

el cuál no está definido. Utilizando la regla de L´Hopital, tenemos

$$G(-1)=\left.\frac{N(s)}{D(s)}\right|_{s=-1}=\left.\frac{N'(s)}{D'(s)}\right|_{s=-1}=\frac{4}{-2}\neq\infty$$

Por lo tanto, no todas las raíces de $D(s)$ son los polos de $G(s)$. Factorizando $N(s)$ y cancelando factores comúnes se tiene

$$G(s)=\frac{2(s+3)}{(s-1)(s+1)(s+2)}$$

$G(s)$ tiene un cero en -3 y dos polos en 1 y -2.

Del ejemplo anterior, si los polinomios $N(s)$ y $D(s)$ no tienen factores comúnes, todas las raíces de $N(s)$ y $D(s)$ son, respectivamente, los ceros y los polos de $G(s)$. Si $N(s)$ y $D(s)$ no tienen factores comúnes se dice que son coprimos y $G(s)$ es irreducible.